Sobre la noción de *estructura matemática abstracta* en la teoría de categorías (superiores)

On the Notion of Abstract Mathematical Structure *in (Higher) Category Theory*

Sobre a noção de estrutura matemática abstrata *na teoria das categorias (superiores)*

Gabriel Catren
Laboratoire SPHERE — *Sciences, Philosophie, Histoire* (UMR 7219)
Université de Paris Cité — CNRS, Francia
gabriel.catren@cnrs.fr
0000-0002-3777-9789

→ **Recibido:** 07/03/2026
→ **Aceptado:** 18/05/2026
→ **Publicado:** 31/10/2026

→ **Artículo Dossier II**
"Filosofía y Fundamentos de la Física"
© 2026 Gabriel Catren
CC BY 4.0

→ **Cómo citar:** Catren, G. (2026). Sobre la noción de estructura matemática abstracta en la teoría de categorías (superiores). *Culturas Científicas*, 7(1), pp. 152–184 doi.org/10.35588/cc.v7d8359

[RESUMEN]

En este artículo analizaremos dos de los sentidos que reviste el término *estructura* en la teoría de categorías (superiores). A dichos efectos, entenderemos una categoría como un *contexto ontológico relacional* asociado a un *tipo de estructura matemática abstracta* (e.g. categoría de grupos). En la expresión *estructura matemática abstracta*, el término *estructura* tiene un doble significado. Por un lado, hace referencia a los *tipos de estructura* que se pueden definir sobre una materia conjuntista (e.g. estructura de grupo) y a los *modelos* de cada tipo de estructura (cada grupo en particular). Por otro lado, el término *estructura* hace referencia al concepto abstracto producido por la relación de *isomorfismo* (y, más generalmente, por la relación de *equivalencia* en el caso general de una categoría superior). Objetos isomorfos de una categoría pueden ser entendidos como distintas presentaciones de la misma estructura abstracta, cada una de las cuales es un modelo del tipo de estructura correspondiente. En este artículo, intentamos desarrollar ambos sentidos del término *estructura* – así como las relaciones entre los tres conceptos centrales: *tipo de estructura*, *modelo* y *presentación* – en un marco conceptual unificado.

Dado que una categoría es ella misma un referente del discurso matemático, mostraremos que los conceptos de *tipo de estructura*, *modelo* y *presentación* se aplican reflexivamente a la noción misma de categoría. En efecto, una categoría puede entenderse como una presentación de un modelo de un tipo de estructura cuyo contexto ontológico relacional asociado es la 2-*categoría de categorías* Cat. Veremos que este tipo de estructura también puede ser entendido como una materia conjuntista (bisortal) enriquecida con una estructura de categoría. Los modelos de dicho tipo de estructura están definidos por el criterio de igualdad para las categorías dado por la noción de *equivalencia de categoría*.

Finalmente, argumentaremos que esta caracterización "estructuralista" de la noción misma de categoría (y de categoría superior) actúa retroactivamente sobre el modo de entender la noción de *estructura matemática abstracta* en general. Cada modelo de una estructura no estará asociado a una *clase de equivalencia* como es el caso en el marco de la *abstracción fregeana*, sino (en el caso general) a una componente conexa del ∞-grupoide subyacente a la ∞-categoría correspondiente.

[PALABRAS CLAVES]

teoría de n-categorías; estructura; isomorfismo; equivalencia; abstracción; principio de identidad; mónada

[ABSTRACT]

In this article we analyze two of the senses that the term *structure* takes on in (higher) category theory. To this end, we understand a category as a *relational ontological context* associated with a *kind of abstract mathematical structure* (e.g. the category of groups). In the expression *abstract mathematical structure*, the term *structure* has a twofold meaning. On the one hand, it refers to the *kinds of structure* that can be defined over a set-theoretic matter (e.g. the group structure) and to the *models* of each kind of structure (each particular group). On the other hand, the term *structure* refers to the abstract concept produced by the relation of *isomorphism* (and, more generally, by the relation of *equivalence* in the general case of a higher

category). Isomorphic objects of a category can be understood as distinct presentations of the same abstract structure, each of which is a model of the corresponding kind of structure. In this article, we attempt to develop both senses of the term *structure* – as well as the relations among the three central concepts: *kind of structure*, *model* and *presentation* – within a unified conceptual framework.

Since a category is itself a referent of mathematical discourse, we will show that the concepts of *kind of structure*, *model* and *presentation* apply reflexively to the notion of category itself. Indeed, a category can be understood as a presentation of a model of a kind of structure whose associated relational ontological context is the 2-*category of categories* Cat. We will see that this kind of structure can also be understood as a (two-sorted) set-theoretic matter enriched with a category structure. The models of this kind of structure are defined by the identity criterion for categories given by the notion of *equivalence of categories*.

Finally, we will argue that this "structuralist" characterization of the notion of category itself (and of higher category) acts retroactively on the way we understand the notion of *abstract mathematical structure* in general. Each model of a structure will not be associated with an *equivalence class*, as is the case in the framework of *Fregean abstraction*, but rather (in the general case) with a connected component of the ∞-groupoid underlying the corresponding ∞-category.

[KEY WORDS]
theory of n-categories; structure; isomorphism; equivalence; abstraction; principle of identity; monad

1. Introducción

La teoría de categorías nace oficialmente en 1945 con el artículo de Mac Lane y Eilenberg *A General Theory of Natural Equivalences* en el área de la topología algebraica (Eilenberg y Mac Lane, 1945). A partir de los trabajos de Lawvere en los años 60, la teoría de categorías comienza a exhibir su capacidad de disputarle a la teoría de conjuntos la pretensión de constituirse en "fundamentos de las matemáticas", lo cual abre el debate en filosofía de las matemáticas sobre el estatuto, los fundamentos y las consecuencias filosóficas de esta teoría. Dicho debate se desarrolló a lo largo de diversas líneas de investigación interrelacionadas. En primer lugar, podemos mencionar el estudio de un tipo de categorías particular denominadas *topoi* (Anel y Joyal, 2021), los cuales están definidos por un cierto número de propiedades tales que la categoría de los conjuntos es un topos entre otros (Bell, 1986; Lambek, 1982; Landry y Marquis, 2005; McLarty, 1990). En segundo lugar, podemos mencionar las tentativas de ver en la teoría de categorías una suerte de *meta-matemática matemática* capaz de organizar el campo de las matemáticas, de proveer un lenguaje unificado y de detectar patrones comunes a distintas ramas de esta disciplina[1]. Podemos mencionar también las distintas tentativas de ver en la teoría de categorías una implementación satisfactoria de ciertas tesis de carácter estructuralista, como por ejemplo las formuladas en el marco de la filosofía estructuralista de las matemáticas (Benacerraf, 1965; Reck y Schiemer, 2025; Resnik, 1997; Shapiro, 1997) o de lo que Awodey denominase *estructuralismo matemático* (Awodey, 1996) (sobre la "prehistoria del estructuralismo matemático" respecta, ver (Reck y Schiemer, 2020)).

En lo que a esta última línea de investigación respecta, los debates sobre el alcance estructuralista de la teoría de categorías están hasta cierto punto dificultados por el carácter altamente polisémico del término *estructura* (Mac Lane, 1996)[2]. En este artículo intentaremos contribuir a clarificar la relación entre la noción de *estructura* y la teoría de categorías analizando dos sentidos del término *estructura* en teoría de categorías, a saber, en primer lugar, como *tipo de estructura* y (correlativamente) como *modelo* de un tipo de estructura y, en segundo lugar, como *estructura abstracta* definida por medio de un principio de abstracción. A su vez, la introducción de una noción abstracta – en el presente caso, la noción de *estructura abstracta* – introduce una distinción entre los casos de la noción abstracta correspondiente (es decir, las distintas estructuras abstractas de un tipo dado) y sus *presentaciones*. Por lo tanto, la discusión que propondremos articula tres niveles: los *tipos de estructura*, los *modelos* de cada tipo de estructura y las diferentes *presentaciones* de cada modelo (ver Tabla N°1 en la conclusión).

En el primer sentido del término, la noción de estructura remite a la tradición bourbakista (Bourbaki, 1950; Corry, 1992, 2004; Heinzmann y Petitot, 2020). Es en este sentido bourbakista

[1]En palabras de Eilenberg y Mac Lane, "In a metamathematical sense our theory provides general concepts applicable to all branches of mathematics, and so contributes to the current trend towards uniform treatment of different mathematical disciplines" (Eilenberg y Mac Lane, 1945, p. 236). Esta tesis fue luego parafraseada por distintos autores de distintos modos, como por ejemplo por Cheng ("I like to think of category theory as the mathematics of mathematics [...] Category theory is a theory of mathematics, but is itself a piece of mathematics" (Cheng, 2022, pp. 13 & 21)), por Mazur ("[The concept of category] frames a possible template for any mathematical theory [...]" (Mazur, 2009)) y por Riehl ("Category theory is the study of patterns of mathematical thought" (Riehl, 2021)).

[2]Como escribe Corry: "However, although nowadays there exists indeed a high degree of agreement that mathematics is 'structural' in character, even a cursory examination of the meaning of the term 'structure' in the diverse places where it appears will reveal that the term 'mathematical structure' is used and understood in diverging ways" (Corry, 1992, pp. 315–316).

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

del término que hay que entender expresiones del tipo *estructura de grupo* o *estructura de espacio topológico*[3]. La idea subyacente – de naturaleza fundamentalmente conjuntista – es que todo objeto matemático puede entenderse como una materia de naturaleza conjuntista (típicamente un conjunto, pero también puede ser, como veremos a continuación, un diagrama de conjuntos) dotado de una *estructura* que obedece ciertas *leyes* (o, en los términos de ciertos autores, que tiene ciertas *propiedades*). En teoría de categorías, cada tipo de estructura matemática está asociado a una categoría (e.g. la categoría de los grupos, la categoría de los espacios topológicos, etc.)[4] y tiene *casos* o *modelos*, es decir estructuras del tipo correspondiente.

En el segundo sentido del término que analizaremos aquí, la noción de estructura es una noción *abstracta* definida por medio de la noción categórica de *isomorfismo* (y por la relación de *equivalencia* en el caso general de una categoría superior)[5]. Una de las contribuciones esenciales de la teoría de categorías es que la noción de *igualdad estricta* "$=$" es *estirada*, *relajada* o *debilitada*, siendo sustituida por la noción de *isomorfismo* "$\simeq$" (y, más generalmente, por la noción de *equivalencia* en teoría de categorías superiores). Este relajamiento de la igualdad estricta implica que los referentes últimos del discurso matemático (es decir, los modelos de cada tipo de estructura) están dados por *estructuras abstractas* definidas – por medio de un principio (constructivo) de abstracción (Catren, 2023) – por medio de la relación categórica de equivalencia.

En la Sección N°2 introduciremos la noción de *categoría*. La presentación que propondremos es idiosincrática en el sentido de que introduce una terminología que no es estándar en teoría de categorías (e.g. *conjunto globular reflexivo*, *magma*, *contracción*) y que se utilizará luego (en la Sección N°8) para definir la noción de *categoría superior débil*. En la Sección N°3, analizaremos uno de los aspectos más importantes, a nuestro juicio, de la teoría de categorías, a saber el "estiramiento" o "relajamiento" de la noción de igualdad estricta bajo la forma de la relación de *isomorfismo*. En la Sección N°4, argumentaremos que el principio de abstracción que produce entidades abstractas a partir de la relación de isomorfismo es – a diferencia de la *abstracción fregeana* basada en la noción de relación de equivalencia – un principio de abstracción de naturaleza *constructiva*. En la Sección N°5, introduciremos el *principio de identidad categórico*. En la Sección N°6, argumentaremos en favor de la necesidad de pasar de la *teoría de categorías* a la *teoría de categorías superiores débiles* partiendo del hecho de que la teoría de categorías sigue dependiendo parcialmente de la noción de igualdad estricta. En la Sección N°7, introduciremos, a los efectos de preparar la definición de una categoría superior débil, una manera alternativa de presentar la noción de categoría, a saber como un *álgebra sobre una mónada*. En la Sección N°8 introduciremos la definición de Penon de una *categoría superior débil*. En la conclusión (Sección N°9), presentaremos una visión sinóptica de

[3]Por ejemplo, en *The Architecture of Mathematics*, Bourbaki utiliza el término *estructura* del modo siguiente: "One says that a set in which an operation $x \bullet y$ has been defined which has the three properties (a) [associativity], (b) [existence of a neutral element], (c) [existence of inverses] is provided with a group structure [...]" (Bourbaki, 1950, p. 225); "[...] to define a structure, one takes as given one or several relations, into which these elements enter [...]; then one postulates that the given relation, or relations, satisfy certain conditions (which are explicitly stated and which are the axioms of the structure under consideration)" (Bourbaki, 1950, pp. 225–226).

[4]Esto no significa que toda categoría sea una categoría de un tipo de objetos matemáticos. Es también posible definir una categoría directamente especificando sus objetos y sus morfismos (e.g. la categoría $\mathbf{2}$ formada por dos objetos y un morfismo entre ellos, además de los morfismos identidad). Es también posible asociar una categoría a un único objeto matemático, como por ejemplo la categoría BG definida por un grupo G.

[5]Vale la pena señalar que, según Marquis, hacer matemáticas modulo isomorfismos es también una componente esencial del legado bourbakista (Marquis, 2020, 2022).

los argumentos presentados. Vale la pena señalar que las últimas dos secciones (secciones N°7 y 8) tienen un carácter más técnico que el resto del artículo ya que presuponen conocimientos básicos en teoría de categorías (a saber, las nociones de *functor*, de *transformación natural*, de *functores adjuntos*, de *mónada*, y de *álgebra sobre una mónada*). El lector que no posea dichos conocimientos puede saltearse dichas secciones y pasar directamente a la conclusión.

Para una introducción general a la teoría de categorías, recomendamos los libros de texto de Awodey (2006), Leinster (2014) y Riehl (2016), así como la monografía clásica de Mac Lane (1998). Para una aproximación histórica a la teoría de categorías, referimos al lector a la monografía de Krömer (2007), al artículo de Dubuc (2014) y al artículo de Landry y Marquis (2005). En lo que al análisis filosófico de la teoría de categorías respecta, referimos al lector a los textos siguientes (Awodey, 1996, 2004, 2014; Bell, 1981; Corry, 2004; Ellerman, 1988; Feferman, 1977; Hellman, 2003; Landry, 1999, 2006, 2017; Landry y Marquis, 2005; Linnebo y Pettigrew, 2011; McLarty, 1993, 2004, 2005; Makkai, 1998; Marquis, 2006, 2009, 2013, 2015; Pedroso, 2009; Rodin, 2011, 2014; Shapiro, 2005).

2. Definición de una categoría como un magma estrictamente coherente

Brevemente, una categoría (pequeña) es un objeto matemático dado por un conjunto de *objetos* idénticos a sí mismos y un conjunto de *morfismos* entre dichos objetos que pueden ser parcialmente compuestos de un modo asociativo. Más precisamente, una categoría $\mathcal{C}$ consiste en primer lugar en un diagrama de conjuntos $\mathbb{G}$ (llamado también *grafo dirigido reflexivo* o, en el marco de la teoría de categorías superiores, 1-*conjunto globular reflexivo*) de la forma

$$C_1 \underset{t}{\overset{s}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\underset{i}{}}}}} C_0, \tag{1}$$

Los elementos del conjunto C_0 son denominados *objetos* de la categoría y los elementos del conjunto C_1 son denominados *morfismos* de la categoría. Las funciones s y t envían cada morfismo $f \in C_1$ a su *fuente* $s(f) \in C_0$ y a su *blanco* $t(f) \in C_0$ respectivamente. Dos morfismos con la misma fuente y el mismo blanco serán denominados *paralelos*. El conjunto de morfismos paralelos entre dos objetos $a, b \in C_0$ se denotará $Hom_{\mathcal{C}}(a, b)$.

La función $i : C_0 \to C_1$ satisface $s \circ i = t \circ i = id_{C_0}$ (es decir, $i(a) \in Hom_{\mathcal{C}}(a, a)$). Dicha función establece la existencia, para cada objeto a de la categoría, de un *morfismo identidad* putativo $i(a) = id_a \in Hom_{\mathcal{C}}(a, a)$. El carácter *putativo* de id_a resulta del hecho de que, por el momento, no hemos dado ninguna propiedad definitoria de dichos morfismos identidad, es decir ninguna propiedad que permite distinguirlos de los otros endomorfismos de a en $Hom_{\mathcal{C}}(a, a)$.

El siguiente paso para definir una categoría consiste en dotar a un conjunto 1-globular reflexivo de una estructura de *magma*. La estructura de magma está dada por la existencia, para cada terna de objetos $a, b, c \in C_0$, de una *función de composición*

$$\begin{array}{rcl} (-) \circ (-) : Hom_{\mathcal{C}}(a, b) \times Hom_{\mathcal{C}}(b, c) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(a, c), \\ (f, g) & \mapsto & g \circ f \end{array} \tag{2}$$

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

La composición puede entenderse como una *operación binaria parcialmente definida* (y no conmutativa) sobre el conjunto de morfismos de la categoría. Las funciones de composición establecen que (por ejemplo) un morfismo particular en el conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(a,c)$ se interpretará como la composición de un morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(a,b)$ y un morfismo $g \in Hom_{\mathcal{C}}(b,c)$ y se denotará $g \circ f$. A su vez, la función de composición $Hom_{\mathcal{C}}(a,c) \times Hom_{\mathcal{C}}(c,d) \to Hom_{\mathcal{C}}(a,d)$ especifica cómo se componen los morfismos $g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(a,c)$ y $h \in Hom_{\mathcal{C}}(c,d)$ para formar un morfismo $h \circ (g \circ f) \in Hom_{\mathcal{C}}(a,d)$. Por lo tanto, la estructura de magma incluye morfismos asociados a composiciones binarias con distintos grados de profundidad, como por ejemplo el morfismo $h \circ (g \circ f)$ (el cual tiene profundidad de orden 2 en el sentido de que es una composición binaria de composiciones binarias).

El término *magma* tiene la intención de subrayar que la configuración resultante no tiene *coherencia* alguna. Por medio del término *coherencia*, queremos señalar que la composición de ciertos diagramas de morfismos componibles puede realizarse de múltiples modos, sin que exista en el magma relación alguna entre dichas composiciones. Por ejemplo, los morfismos $f \in Hom_{\mathcal{C}}(a,b)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(b,c)$ y $h \in Hom_{\mathcal{C}}(c,d)$ introducidos anteriormente pueden componerse de acuerdo con dos ordenamientos distintos, a saber $h \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ f$. A los efectos de dotar al magma de coherencia (y así obtener, finalmente, una categoría), es necesario enriquecer la estructura con dos leyes: la *ley de asociatividad* y las *leyes de identidad*. Dados tres morfismos que forman un diagrama componible

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d, \tag{3}$$

la *ley de asociatividad*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{4}$$

elimina la ambigüedad resultante del hecho de que existan dos composiciones posibles de dicho diagrama. Dado un morfismo $f : a \to b$, los morfismos identidad id_a y id_b satisfacen las *leyes de identidad*

$$id_b \circ f = f \quad \text{y} \quad f \circ id_a = f. \tag{5}$$

En otros términos, los morfismos identidad actúan como elementos neutros para la operación binaria $\circ$. Las leyes de identidad son precisamente las condiciones que distinguen al morfismo identidad id_a de los otros endomorfismos en $Hom_{\mathcal{C}}(a,a)$.

Dado que las leyes de asociatividad (4) y de identidad (5) están expresadas por medio de igualdades estrictas "$=$" entre los correspondientes morfismos, la coherencia que dichas leyes garantizan será denominada aquí *coherencia estricta*. Finalmente, una categoría puede definirse como un 1-*magma* (es decir, un 1-conjunto globular reflexivo enriquecido con composiciones binarias) *dotado de coherencia estricta*.

3. Sobre la noción de isomorfismo *qua* igualdad categórica

Una de las características distintivas de la teoría de categorías es el "estiramiento" (*étirement* en el original francés del artículo de Penon sobre las ∞-categorías débiles (Penon, 1999)) o el "debilitamiento" (*weakening*) de la noción de *igualdad estricta* por medio de la noción de

isomorfismo. Un isomorfismo entre dos objetos a y b de una categoría (denotado $a \simeq b$) está dado por un par de morfismos

$$f : a \to b \qquad\qquad g : b \to a$$

que satisfacen

$$g \circ f = id_a \quad \text{y} \quad f \circ g = id_b. \tag{6}$$

De este modo, un isomorfismo puede entenderse como una especie de factorización de las identidades triviales correspondientes. En particular, los endomorfismos $f : a \to a$ que son isomorfismos son denominados *automorfismos*. Puede verse fácilmente que un morfismo identidad id_a es necesariamente un isomorfismo, siendo id_a su propio inverso.

En teoría de categorías la noción de isomorfismo juega un rol central y novedoso, a saber el de permitir definir la noción categórica de *igualdad* entre dos objetos de una misma categoría. En otros términos, en teoría de categorías dos objetos isomorfos definen objetos categóricamente "iguales"[6]. Dado que dos objetos numéricamente distintos pueden ser isomorfos, ¿qué significa que puedan definir objetos categóricamente "iguales" dado que *iguales* ya no puede significar ser uno y el mismo ente (igualdad numérica)? Una igualdad estricta $p = q$ entre dos expresiones matemáticas establece que p y q son idénticas en el contexto matemático correspondiente, es decir, que no hay diferencia alguna entre ellos. En teoría de categorías, por ejemplo, la ley de asociatividad (4) establece que la diferencia entre las composiciones $h \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ f$ del diagrama (3) es nula en dicho marco teórico. En teoría de conjuntos, el *axioma de extensionalidad* – según el cual "dos" conjuntos son estrictamente iguales si tienen los mismos elementos – establece que la diferencia entre distintas definiciones intensionales de la misma colección de elementos es inexistente en el marco de toda axiomatización de la teoría de conjuntos que incorpore dicho axioma.

De acuerdo con el análisis de la noción de igualdad matemática propuesto por Whitehead, toda igualdad de la forma $p = q$ intrica una *paradoja* (la diferencia entre p y q) y un *truismo* (la identidad parcial entre p y q)[7]. En el caso de las igualdades estrictas, el elemento paradojal – es decir, aquello en lo que p y q difieren – es considerado matemáticamente inexistente en el contexto correspondiente. Algunos autores – como Frege en el período del *Begriffsschrift*[8]

[6] Estrictamente hablando – y desde la perspectiva aportada por la *teoría homotópica de tipos* – una categoría en la que la noción de isomorfismo es equivalente a la igualdad es denominada *univalente* (ver (Ahrens et al., 2015) y (The Univalent Foundations Program, 2013, §9.1)). Podríamos decir que por medio del concepto de *univalencia* la teoría homotópica de tipos formaliza en el andamiaje lógico mismo de la teoría dicha equivalencia entre isomorfismos e igualdad, equivalencia que en la teoría de categorías opera como una suerte de comprensión externa de la teoría.

[7] "It is to be observed that the proposition asserted by the equation, $p = q$, consists of two elements ; which for the sake of distinctness we will name [...] the *truism* and the *paradox*. The *truism* is the partial identity of both p and q [...] The *paradox* is the distinction between p and q, so that p is one thing and q is another thing [...]" (Whitehead, 1898).

[8] "Identity of content differs from conditionality and negation in that it applies to names and not to contents. Whereas in other contexts signs are merely representatives of their content so that every combination into which they enter expresses only a relation between their respective contents, they suddenly display their own selves when they are combined by means of the sign for identity of content; for it expresses the circumstance that the two names have the same content. Hence, the introduction of a sign for identity of content necessarily produces a bifurcation in the meaning of all signs: they stand at times for their content, at times for themselves" (Frege, 1972, §8).

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

y Quine[9] – justifican dicha eliminación de la diferencia "paradojal" entre términos iguales aludiendo que dicha diferencia es meramente nominal o lingüística. En otros términos, las expresiones p y q en una igualdad $p = q$ no serían más que nombres distintos de la misma entidad matemática. En esta línea argumentativa, Wittgenstein llegó a afirmar en el *Tractatus Logico-Philosophicus* que la noción de igualdad – entendida como dispositivo que permite eliminar la sobreabundancia de expresiones en relación a los individuos designados – es en última instancia innecesaria y puede ser consecuentemente eliminada estableciendo una colección de expresiones en correspondencia biunívoca con los individuos designados[10].

Sin embargo, las tentativas de reducir la relación de igualdad matemática a un mero artefacto destinado a controlar un exceso de estructura lingüística conllevan una truncación tendencialmente idealista de lo que se entiende por matemáticas. En efecto, la tesis según la cual una igualdad matemática expresa una sinonimia entre dos nombres de una misma cosa es insuficiente para explicar la importancia de la relación de igualdad en la práctica matemática y alimenta una concepción idealista de las matemáticas según la cual las *construcciones*, los *cómputos* y las *pruebas* son operaciones extra-matemáticas o meramente subjetivas cuyas diferencias pueden ser eliminadas sin consecuencia alguna. Como escribe Girard:

> This equality $3 \times 2 = 5 + 1$ makes sense in the mainstream of mathematics by saying that the two sides denote the same integer [...]. This is the denotational aspect, which is undoubtedly correct, but it misses the essential point: There is a finite *computation* process which shows that the denotations are equal. It is an abuse [...] to say that 3×2 *equals* $5 + 1$ [...] The two expressions have different *senses* and we must *do* something (make a proof or a calculation [...]) to show that these two *senses* have the same *denotation*. (Girard, 1989)

La tesis según la cual la diferencia entre los dos lados de la igualdad $3 \times 2 = 5 + 1$ es estrictamente nula implica afirmar que la noción de *cómputo* o *cálculo* es matemáticamente irrelevante. Como parece sugerirlo implícitamente Girard, un marco conceptual más adecuado a la práctica matemática efectiva fue propuesto por Frege en su artículo de 1892 *Sinn und Bedeutung* (Frege, 1960) (ver también (Martin-Löf, 2021)). Según la tesis fregeana, una expresión matemática *expresa* un *sentido* (una presentación, un cálculo, una construcción)

[9] "Identity is such a simple and fundamental idea that it is hard to explain otherwise than through mere synonyms. To say that p and q are identical is to say that they are the same thing. Everything is identical with itself and with nothing else. But despite its simplicity, identity invites confusion. E.g., it may be asked: Of what use is the notion of identity if identifying an object with itself is trivial and identifying it with anything else is false? [...] For truth of a statement of identity it is necessary only that '$=$' appear between names of the same object; the names may, and in useful cases will, themselves be different. For it is not the names that are affirmed to be identical, it is the things named. [...] Still, since the useful statements of identity are those in which the named objects are the same and the names are different, it is only because of a peculiarity of language that the notion of identity is needed. If our language were so perfect a copy of its subject matter that each thing had but one name, then statements of identity would indeed be useless.[...] The utility of language lies partly in its very failure to copy reality in any one-thing-one-name fashion. The notion of identity is then needed to take up the slack. [...] what are identical are the objects with themselves and not the names with one another; the names stand in the statement of identity, but it is the named objects that are identified. [...] Statements of identity consisting of '$=$' flanked by singular terms are needed, we saw, because language includes a redundancy of names" (Quine, 1950, §35); "[...] the statements of identity that are true and not idle consist of unlike singular terms that refer to the same thing" (Quine, 1960, p. 107).

[10] "Identity of object I express by identity of sign, and not by using a sign for identity. Difference of objects I express by difference of signs. [...] identity is not a relation between objects" (Wittgenstein, 1993, §5.53).

y *denota* un *referente* (la entidad presentada, el resultado del cálculo, el resultado de la construcción). Según Frege, una igualdad matemática $p = q$ afirma que los términos p y q expresan *distintos* sentidos o modos de presentación (lo cual constituye el elemento paradojal de la igualdad) del *mismo* referente (lo cual constituye el truismo de la igualdad). De este modo, las diferencias entre presentaciones, cálculos o construcciones no son reducidas a una mera diferencia lingüística carente de toda contraparte matemática.

Podríamos afirmar que la tesis de Frege, lejos de caracterizar la noción de igualdad estricta, ya anuncia en cierto sentido su *estiramiento* bajo la forma de la noción de isomorfismo. En efecto, una igualdad estricta $a = b$ parece eliminar toda distancia en la que podría anidarse el elemento que Whitehead llama paradojal, es decir la diferencia entre a y b. Por el contrario, la noción de isomorfismo torna posible la existencia de una distancia numérica entre ambas expresiones. Ahora bien, si dos objetos isomorfos de una categoría son entendidos como diferentes presentaciones de un mismo referente, ¿cuál es el referente en cuestión? La respuesta a esta pregunta se presenta naturalmente si tenemos en cuenta que la noción de isomorfismo define una relación de equivalencia en el conjunto de objetos de una categoría. A su vez, la existencia de una relación de equivalencia permite producir una *noción abstracta* cuyos casos son las distintas clases de equivalencia. En el caso de la teoría de categorías, la noción abstracta producida por la relación de isomorfismo es justamente la noción denominada *estructura*[11]. El análisis fregeano de las igualdades matemáticas en *Sinn und Bedeutung* y el principio fregeano de abstracción se intrican en la teoría de categorías en la afirmación según la cual dos objetos isomorfos de una categoría son modos de presentación de una misma *estructura abstracta*. De este modo, las entidades de lo que denominaremos la *ontología categórica* — es decir, los referentes o individuos del discurso categórico — no están dadas por los objetos particulares de una categoría, sino más bien por las entidades abstractas – denominadas *estructuras* – producidas por la relación de isomorfismo. En los términos de Awodey:

> What does it mean to say that two things are isomorphic? Some might be tempted to say:
>
> $$a \simeq b \Leftrightarrow a \text{ and } b \text{ have the same structure.} \tag{7}$$
>
> And that would be true. But it is not the *definition* of isomorphism, because it presumes the notion of structure and an identity criterion for it, and that is putting the cart before the horse. *Structure* is like *color* or *the direction of a line* or *number*: it is an abstract concept. And as Frege wisely taught us, it is determined by an abstraction principle, in this case:
>
> $$str(a) = str(b) \Leftrightarrow a \simeq b.$$
>
> The structure of a is the same as the structure of b just in case a and b are isomorphic. So (7) is indeed true, but it is the definition of 'structure' in terms of isomorphism, not the other way around. (Awodey, 2014)

Podemos entonces afirmar que la teoría de categorías es una teoría *estructuralista* en el sentido preciso de que sus referentes son las *estructuras* (o formas) *abstractas* definidas

[11] Teniendo en cuenta que la noción de isomorfismo significa etimológicamente *misma forma*, la noción abstracta correspondiente podría también ser denominada *forma*. De hecho esta terminología es utilizada por Awodey cuando escribe "The subject matter of pure mathematics is invariant form [...]" (Awodey, 1996).

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

por la relación de isomorfismo (y más generalmente de equivalencia) y no los objetos que instancían o presentan dichas estructuras. Es fundamental aquí hacer la distinción siguiente: dos objetos a y b pueden tener el mismo *tipo de estructura* — lo que ocurre cuando son ambos objetos de una misma categoría — sin poseer la *misma estructura* del tipo correspondiente — circunstancia que se da únicamente cuando los objetos son isomorfos ($a \simeq b$). Por ejemplo, dos grupos comparten el mismo tipo de estructura (la estructura de grupo), pero ello no implica que tengan la misma estructura, es decir, que sean isomorfos entre sí[12]. De este modo, una categoría entendida como un contexto ontológico particular define un cierto tipo de estructuras matemáticas (e.g. estructura de grupo, estructura de espacio topológico) y los casos o modelos del tipo correspondiente están dados por las entidades abstractas (las *estructuras*) definidas por la relación de isomorfismo.

Ahora bien, para que la noción de isomorfismo pueda usarse para definir la noción de igualdad categórica, la misma debe satisfacer las dos propiedades definitorias de la noción de igualdad en lógica de primer orden, a saber la *reflexividad*

$$x = x \qquad \forall x$$

y el *principio de indiscernibilidad de los iguales*, el cual afirma que si $x = y$, entonces x e y deben satisfacer las mismas propiedades. Es decir, para toda fórmula $\varphi(-)$ admisible,

$$x = y \;\Rightarrow\; (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)).$$

Vale la pena señalar que estas propiedades definitorias de la igualdad no distinguen la noción de igualdad estricta. En otros términos, esta definición axiomática de la relación de igualdad no es suficiente para seleccionar la diagonal del dominio de entidades correspondiente. En este sentido, la relación de igualdad así definida no es necesariamente una relación que una entidad solo tiene consigo misma (ver por ejemplo la discusión en (French y Krause, 2006, §6.3)). Cuando la relación de igualdad se predica de entidades numéricamente distintas, el principio de indiscernibilidad de los iguales opera como una restricción de las propiedades admisibles de las entidades correspondientes, en el sentido de que solo serán consideradas admisibles las propiedades compartidas por objetos "iguales". En otros términos, la extensión de la noción de igualdad más allá de la igualdad estricta – es decir, más allá de la diagonal – requiere restringir la noción de propiedad admisible a los efectos de garantizar que entidades iguales con respecto a la nueva relación de igualdad sean en efecto indiscernibles. Por lo tanto, el truismo de una igualdad así entendida no es la *identidad numérica* entre los términos correspondientes, sino la *indiscernibilidad* con respecto a las propiedades admisibles.

En teoría de categorías – donde la noción de igualdad está definida a partir de la relación de isomorfismo – el principio de indiscernibilidad de los iguales se transforma en el *principio de indiscernibilidad de los objetos isomorfos*, principio según el cual los objetos isomorfos deben tener las mismas propiedades. Este principio juega un rol fundamental a la hora de caracterizar las propiedades de los referentes de la teoría de categorías, es decir de las estructuras

[12]Como escriben Awodey y Rodin respectivamente: "Intuitively, two things with the same kind of structure may indeed have the same structure. The categorical notion of isomorphism may now serve as a definition of 'having the same structure of a given kind' " (Awodey, 1996); "Group homomorphism and similar general maps between structures of other types are colloquially called structure-preserving. This is somewhat misleading because if such maps preserve anything at all it is a type of structure but not a particular structure [preserved under isomorphisms]" (Rodin, 2011).

abstractas. Lejos de afirmar que dos objetos isomorfos deben compartir todas sus propiedades (es decir, que deben ser indiscernibles en un sentido indiscriminado del término), este principio permite trazar una línea de demarcación entre las propiedades admisibles de las que no lo son. Las propiedades admisibles – que llamaremos *propiedades categóricas* o *estructurales* – son precisamente aquellas que son invariantes ante isomorfismos. Restringir de este modo el rango de las propiedades admisibles conlleva una conversión ontológica que transforma *objetos isomorfos pero discernibles* (ya que pueden diferir en sus propiedades no estructurales) en *objetos estructuralmente indiscernibles* o $\simeq$*-indiscernibles*. En términos de Makkai[13]:

> [...] two isomorphic structures are, essentially, the same. [...] (Principle of Isomorphism) all grammatically correct properties of objects of a fixed category are to be invariant under isomorphism. Here, a property φ of the variable object x in a given category is invariant under isomorphism if $x \simeq y$ and $\varphi(x)$ imply $\varphi(y)$. The just-stated principle is the analog, formulated for isomorphism in place of ordinary equality, of Leibniz's indiscernibility of identicals, the usual axiom of equality that allows to substitute any thing by any other thing equal to it. [...] The basic character of the Principle of Isomorphism is that of a constraint on the language of Abstract Mathematics; a welcome one, since it provides for the separation of sense from nonsense. (Makkai, 1998)

Por ejemplo, el predicado $\varphi_a(X) =$ "El elemento a pertenece al conjunto X" es extensional pero no estructural, ya que depende del elemento a considerado y no únicamente de la estructura abstracta del conjunto. En otros términos, las propiedades definidas por dicho predicado no son invariantes ante isomorfismos (biyecciones) en la categoría Set. En cambio, el predicado $\varphi_n(X) =$"El conjunto X tiene n elementos" es estructural, en la medida en que sólo depende de la cardinalidad del conjunto (la cual es invariante ante isomorfismos en Set).

4. Principio constructivo de abstracción

Dijimos precedentemente que la noción de isomorfismo permite producir una entidad abstracta por medio del principio fregeano de abstracción[14]. Ahora bien – como argumentamos en el artículo (Catren, 2023, §4 & 5) –, el tipo de abstracción asociado a la noción de isomorfismo puede entenderse como un refinamiento de naturaleza *constructivista* de la abstracción fregeana. La abstracción fregeana está formalmente basada en la noción matemática de *relación de equivalencia* $\sim$ sobre un conjunto X. Dicha relación de equivalencia define una función cociente $X \to X/\sim$ dada por $a \mapsto [a]$, donde $[a]$ es la clase de equivalencia a la que pertenece el elemento $a \in X$. El principio fregeano de abstracción asume entonces la forma siguiente:

$$a \sim b \Longleftrightarrow [a] = [b]. \tag{8}$$

De este modo, podríamos decir que la abstracción fregeana transforma una equivalencia entre elementos de un conjunto X en una igualdad estricta entre las clases de equivalencia

[13]Y en los términos de Awodey: "[...] the only properties which a given object in a given category may have, qua object in that category, are structural ones" (Awodey, 1996).

[14]En lo que a la historia y la filosofía de la noción de *abstracción* respecta, ver la monografía de Mancosu *Abstraction and Infinity* (Mancosu, 2016), así como las referencias allí citadas.

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

correspondientes (dado que $[a]$ y $[b]$ son nombres distintos de la misma clase de equivalencia)[15]. Cada clase de equivalencia – cada una de las cuales es un conjunto – es un caso de la entidad abstracta producida por la abstracción.

Ahora bien, toda categoría $\mathcal{C}$ tiene un grupoide subyacente $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ definido por los isomorfismos de $\mathcal{C}$[16]. A su vez, dicho grupoide puede ser truncado a una relación de equivalencia subyacente sobre el conjunto de objetos de $\mathcal{C}$, donde $a \sim b$ si $a \simeq b$. Esta relación de equivalencia es una truncación del grupoide $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ en el sentido de que solo conserva información sobre la existencia o no de un isomorfismo entre dos objetos, perdiéndose la información sobre los posibles múltiples isomorfismos entre dos objetos que prueban que dichos objetos son isomorfos. Como escribe Shulman, "frequently there may be more than one 'reason' why two 'presentations' define the same [referent] [...] it is often essential to remember which isomorphism we are using to treat two objects as the same. The set-theoretic notion of equivalence classes is unable to do this [...]" (Shulman, 2017).

Lo que denominamos *principio constructivo de abstracción* (Catren, 2023, §4 & 5) es un refinamiento del principio fregeano de abstracción basado en el uso de *grupoides* (y, más generalmente, de ∞-*grupoides*) en vez de relaciones de equivalencia, lo cual permite preservar la información sobre las distintas pruebas posibles (es decir, los isomorfismos) de la equivalencia entre dos objetos. Si la *abstracción fregeana* transforma una *equivalencia* $a \sim b$ en una *igualdad estricta* $[a] = [b]$ entre las clases de equivalencia correspondientes, la *abstracción constructiva* transforma un *isomorfismo* $a \simeq b$ en una *igualdad categórica* – que denotaremos por medio del símbolo $=_{cat}$ – entre los objetos (que denotaremos) $\hat{a}$ y $\hat{b}$ producidos por la abstracción. La diferencia de notación entre a y $\hat{a}$ tiene como objeto subrayar que $\hat{a}$ es la entidad que se obtiene a partir del objeto a cuando solo se consideran las propiedades $\simeq$-invariantes. Los diferentes isomorfismos entre a y b devienen diferentes pruebas de la igualdad categórica entre $\hat{a}$ y $\hat{b}$. De este modo, el principio constructivo de abstracción asume la forma siguiente

$$a \simeq_{\infty} b \Longleftrightarrow \hat{a} =_{cat} \hat{b}. \tag{9}$$

En esta expresión, el símbolo $\simeq_{\infty}$ indica que en general las equivalencias sobre el dominio de entidades considerado están dadas por un ∞-grupoide. Los objetos $\hat{a}$ y $\hat{b}$, producidos por la abstracción a partir de a y b, son categóricamente iguales en el sentido de que poseen las mismas propiedades estructurales; es decir, son categóricamente indiscernibles. Mientras que el principio fregeano de abstracción (8) transforma objetos equivalentes en clases de equivalencia estrictamente iguales, el principio de abstracción constructivo (9) transforma – por medio de una restricción de las propiedades admisibles – objetos isomorfos en objetos categóricamente iguales.

Por ejemplo, los conjuntos $A = \{a_1, a_2\}$ y $B = \{b_1, b_2\}$ son objetos equivalentes (isomorfos) en la categoría Set. A pesar de ser isomorfos, estos conjuntos pueden ser distinguidos (por ejemplo) por medio del predicado extensional $\varphi_{a_1}(X) =$ "El elemento a_1 pertenece al conjunto X". El principio de abstracción constructivo

[15]Como escribe Frege en una carta a Russell del 28 de julio de 1902, "[i]f the relation is, e.g., that of geometrical similarity, then 'a is similar to b' can be replaced by saying 'the shape of a is [strictly] the same as the shape of b' " (Frege, 1980, p. 141).

[16]Un *grupoide* es una categoría en la que todos los morfismos son isomorfismos. El grupoide $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ subyacente a una categoría $\mathcal{C}$ es la categoría cuyos objetos coinciden con los objetos de $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos están dados por los isomorfismos de $\mathcal{C}$.

(9) transforma estos conjuntos – al restringir sus propiedades a las propiedades estructurales – en los conjuntos $\hat{A} = \{\bullet, \bullet\}$ y $\hat{B} = \{\bullet, \bullet\}$. Estos conjuntos son numéricamente distintos pero indiscernibles, es decir copias (o presentaciones) categóricamente iguales del mismo *conjunto abstracto*[17]. De este modo, objetos isomorfos devienen $\simeq$-indiscernibles. Como escribe Angelelli: "The decision to abstract from, that is to ignore noninvariant predicates (with respect to the chosen relation) generates indistinguishability in the initial universe of objects" (Angelelli, 1984, p. 465).

5. Principio de identidad categórico

Como explicaremos ahora, este refinamiento constructivista de la abstracción fregeana comporta una destrivialización del *principio de identidad*

$$a = a, \tag{10}$$

el cual afirma que toda entidad es igual a sí misma. Podríamos decir en términos kantianos, que dicho principio es una proposición *analítica* en el sentido de que no aporta ninguna información sobre la entidad a en particular, es decir ninguna información susceptible de ser usada para distinguir a de otras entidades[18]. Como escribe Wittgenstein en el *Tractatus Logico-Philosophicus*: "[...] decir de una cosa que es idéntica a sí misma es no decir nada en absoluto" (Wittgenstein, 1993, §5.5303). Correlativamente, el principio de identidad es un principio *a priori* en el sentido de que tiene validez universal: no hace falta saber nada sobre a para poder afirmar que la proposición $a = a$ es verdadera. Como afirma célebremente Quine, "no hay entidad sin identidad" (Quine, 1969, p. 23). Como argumentaremos ahora, el estiramiento de la igualdad estricta "$=$" a la igualdad categórica "$=_{cat}$" convierte la proposición analítica *a priori* $a = a$ en una proposición que sigue teniendo una validez *a priori*, pero que – a diferencia del principio clásico – contiene información no trivial sobre la entidad a.

En teoría de categorías, el *principio de identidad* clásico (10) deviene lo que denominaremos *principio de identidad categórico*

$$\hat{a} =_{cat} \hat{a}. \tag{11}$$

Dicho principio sigue teniendo una validez *a priori* o universal ya que, según la definición de la noción de categoría, todo objeto a de una categoría está dotado de un morfismo identidad id_a que, como dijimos anteriormente, es un isomorfismo. Ahora bien, la reformulación categórica del principio de identidad destrivializa dicho principio en el sentido de que la proposición (11)

[17] Conjuntos del tipo $\{\bullet, \bullet\}$ fueron denominados por Lawvere *conjuntos abstractos* y su concepción remonta (según Lawvere (2003, p. ix)) a la noción cantoriana de *número cardinal* (*Kardinalzahl*). En los términos de Bell: "An abstract set may be considered as what arises from a concrete set when each element has been purged of all intrinsic qualities *aside from the quality which distinguishes that element from the rest*. An abstract set is then an image of pure discreteness, an embodiment of raw plurality; in short, it is an assemblage of featureless *but nevertheless distinct* 'dots' or 'motes' " (Bell, 2006).

[18] Según Kant, todo juicio analítico se funda en última instancia en el principio de identidad. Como escribe Kant en un texto de 1790: "It was therefore no mere verbal affectation, but a step in the advance of knowledge, when the *Critique* made knowable *for the first time* the distinction between judgments which rest entirely on the principle of identity or contradiction, and those which require another principle, by naming them analytic as opposed to synthetic judgments" (Kant, 1781, p. 331, 8.245).

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

puede admitir pruebas no triviales dadas por los posibles automorfismos de a diferentes de id_a. En los términos de la teoría homotópica de tipos (The Univalent Foundations Program, 2013; Rijke, 2025), cada automorfismo de a puede ser comprendido como una prueba de su auto-igualdad, es decir de su identidad. De este modo, el principio de identidad deja de ser una proposición meramente analítica, es decir una tautología sin contenido "sintético" alguno. La identidad categórica de una entidad a contiene información *sintética* sobre a (a saber sobre sus simetrías), información que permite distinguirla de otras entidades. De este modo, una noción propiamente ontológica como la noción de *identidad* pasa a depender tanto del contexto ontológico relacional al que pertenece el objeto correspondiente (el cual define el tipo de isomorfismos en cuestión) como del objeto mismo (ya que la identidad categórica está dada por sus automorfismos).

El *principio de la indiscernibilidad de los objetos isomorfos* afirma que las propiedades de un objeto $\hat{a}$ son las propiedades estructurales o categóricas de a, es decir las propiedades invariantes ante los automorfismos de a. De este modo la *identidad categórica* de un objeto impone una restricción sobre su *determinación*. Por ejemplo, en la teoría de la relatividad especial de Einstein, el espacio-tiempo de Minkowski es un objeto altamente simétrico, cuyo grupo de simetrías es el *grupo de Poincaré*. Por lo tanto, sólo los invariantes bajo la acción del grupo de Poincaré definen propiedades estructurales del espacio-tiempo de Minkowski. Como escribe Shulman, "[....] there is one Minkowski spacetime, namely $\mathbb{R}^4$, and [...] it can be identified with itself in many ways, such as translations, $3D$ rotations, and Lorentz boosts. These extra added identifications force everything we say about 'Minkowski spacetimes' to be invariant under their action" (Shulman, 2017). Por ejemplo, los intervalos espaciales o temporales entre dos eventos no son invariantes bajo la acción del grupo de Poincaré, lo cual implica que dichos intervalos no definen propiedades estructurales del espacio-tiempo de Minkowski. En cambio, el intervalo espacio-temporal entre dos eventos, definido por la métrica de Minkowski, es invariante bajo la acción del grupo de Poincaré, lo cual implica que dicha noción sí define propiedades estructurales del espacio-tiempo de Minkowski.

De acuerdo con esta línea argumental, podríamos decir que la teoría de categorías permite reformular la célebre afirmación de Weyl

> Objectivity means invariance with respect to the group of automorphism (Weyl, 1952, p. 132)

en términos propiamente ontológicos. En efecto, podemos parafrasear dicha afirmación diciendo que la *determinación* de un objeto – el conjunto de sus propiedades estructurales, categóricas u (en los términos de Weyl) "objetivas" – tiene que ser compatible con su *identidad categórica*, es decir invariante ante la acción de su grupo de automorfismos. Mientras que las nociones ontológicas de *identidad* y *determinación* son completamente independientes cuando la primera se formaliza mediante el principio de identidad clásico (10), dichas nociones dejan de serlo al utilizar el principio de identidad categórico (11).

6. Hacia la teoría de categorías superiores débiles

Como hemos visto, la noción de isomorfismo *qua* igualdad categórica estira, relaja o debilita la noción de *igualdad estricta*. Sin embargo, la teoría de categorías sigue dependiendo

de un modo esencial de la noción de igualdad estricta. En efecto, igualdades estrictas aparecen en la definición misma de la noción de categoría bajo la forma de *igualdades entre morfismos*. Tanto la *asociatividad de la composición* (4) como las *leyes de identidad* (5) que satisfacen las identidades triviales utilizan igualdades estrictas entre morfismos. Además, la propia definición de *isomorfismo* (6) también emplea igualdades estrictas entre morfismos. En otros términos, la noción de isomorfismo utilizada para estirar la noción de igualdad estricta *entre objetos* depende ella misma de la noción de igualdad estricta *entre morfismos*. De este modo, la teoría de categorías parece reposar sobre dos regímenes ontológicos diferentes: uno para los objetos (cuyo criterio de igualdad está dado por la noción de isomorfismo) y uno para los morfismos (cuyo criterio de igualdad está dado por la noción de igualdad estricta). Mientras que los objetos de una categoría – en la medida en que son sometidos a un régimen de igualdad débil o categórica – son tratados como meras *instanciaciones* o *presentaciones* de una estructura abstracta, los morfismos de una categoría son tratados de manera *no estructural*, es decir como *individuos plenamente constituidos* sometidos a un régimen de igualdad estricta[19]. En conclusión, la teoría de categorías no implementa una sustitución completa de las igualdades estrictas por igualdades categóricas, lo cual significa que dicha teoría sigue dependiendo – al menos parcialmente – del régimen ontológico que se proponía superar.

Para resolver este problema y poder definir una ontología categórica homogénea, debemos sustituir las igualdades estrictas presentes en la definición de categoría (4 y 5), así como en la definición de la noción de isomorfismo (6), por *isomorfismos*. Ahora bien, como las entidades relacionadas por tales igualdades *son ellas mismas morfismos*, los nuevos isomorfismos deberían ser *isomorfismos entre morfismos*. Pero para ello es necesario extender la ontología conjuntista de base introduciendo una noción de *morfismo entre morfismos*. Una sustitución completa de las igualdades estrictas por igualdades categóricas solo puede llevarse a cabo si damos el salto hacia las *categorías superiores débiles*, es decir, hacia una teoría de categorías *con morfismos de orden superior*, es decir *con morfismos entre morfismos entre objetos* (denominados 2-*morfismos*), con *morfismos entre morfismos entre morfismos entre objetos* (denominados 3-*morfismos*), etc. Una n-*categoría* es una extensión de la noción de categoría cuya ontología conjuntista de base está dada por objetos y k-morfismos para todo $1 \leqslant k \leqslant n$. Por otra parte (y a eso hace referencia el adjetivo *débil* en la expresión *categoría superior débil*), todas las igualdades entre entidades de una n-categoría (objetos y k-morfismos) deberían ser igualdades categóricas.[20] Como veremos a continuación, el único modo de poder sustituir completamente las igualdades estrictas por igualdades categóricas es pasar al límite de las ω-*categorías débiles* (donde ω es el primer ordinal que satisface $\omega > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

Ahora bien, en una categoría superior débil, la noción de igualdad categórica no está dada por la relación de *isomorfismo*, sino por la relación más general de *equivalencia*. Brevemente, una equivalencia es un morfismo invertible en el sentido más débil posible permitido por la n-categoría correspondiente. Como dijimos anteriormente, la definición de la noción de isomorfismo (6) utiliza igualdades estrictas entre morfismos. En el marco de la teoría de categorías, dichas igualdades entre morfismos no pueden sustituirse por isomorfismos ya que no

[19] Como escribe Marquis, "[...] there is an implicit criterion of identity at work for morphisms. [...] Morphisms are treated as particulars from the very beginning" (Marquis, 2006, pp. 183–184).

[20] Manin describe esta extensión de la noción de igualdad categórica de los objetos a los morfismos en los términos siguientes: "The following view of mathematical objects is encoded in this hierarchy: there is no equality of mathematical objects, only equivalences. And since an equivalence is also a mathematical object, there is no equality between them, only the next order equivalence etc., *ad infinitum*" (Manin, 2003).

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

existen morfismos superiores. En la teoría de categorías superiores sin embargo, esas igualdades entre morfismos pueden sustituirse por morfismos invertibles superiores. En el caso de una n-categoría débil, todas las igualdades estrictas entre objetos y k morfismos podrán ser sustituidas por igualdades categóricas salvo en el nivel $k = n$ más alto (ya que por definición no hay $(n+1)$-morfismos en una n-categoría).

Consideremos el caso de una 2-categoría. En una 2-*categoría*, disponemos ahora de una noción de 2-*isomorfismo* para estirar las igualdades estrictas (6) utilizadas en la definición de los 1-isomorfismos. Por lo tanto, una *igualdad maximalmente extendida* (es decir, una *equivalencia*) entre dos objetos en una 2-categoría viene dada por la presencia de dos 1-*morfismos*

$$f : a \to b, \qquad\qquad g : b \to a$$

tal que existen 2-*isomorfismos*

$$\eta : id_a \Rightarrow g \circ f, \qquad\qquad \epsilon : f \circ g \Rightarrow id_b$$

con inversos

$$\eta^{-1} : g \circ f \Rightarrow id_a, \qquad\qquad \epsilon^{-1} : id_b \Rightarrow f \circ g$$

de modo que se satisfacen las siguientes igualdades estrictas entre 2-morfismos:

$$\eta^{-1} \circ \eta = id_{id_a}, \qquad\qquad \eta \circ \eta^{-1} = id_{g \circ f},$$

$$\epsilon^{-1} \circ \epsilon = id_{f \circ g}, \qquad\qquad \epsilon \circ \epsilon^{-1} = id_{id_b},$$

lo cual significa que η y ϵ son 2-isomorfismos. Es importante señalar que estas últimas igualdades estrictas entre 2-morfismos no pueden relajarse en el marco de una 2-categoría, pues para hacerlo necesitaríamos 3-morfismos. De este modo, la noción maximalmente débil de morfismo invertible entre objetos en una 2-categoría está dada por la noción de 1-*morfismo invertible modulo* 2-*isomorfismos* y la noción maximalmente débil de morfismo invertible entre 1-morfismos está dada por la noción de 2-*isomorfismo*. Un ejemplo de una 2-categoría es la categoría Cat cuyos objetos son categorías, sus 1-morfismos son functores y sus 2-morfismos son transformaciones naturales. En ese contexto, la noción maximalmente débil de invertibilidad de un functor entre dos categorías (introducida por Grothendieck en 1957 en el artículo *Sur quelques points d'algèbre homologique* (Grothendieck, 1957)) se denomina *equivalencia de categorías* (ver también (Krömer, 2007, §3.3.4.3, pp. 148–151)).

Vale la pena señalar que la noción de *equivalencia* engloba todas las nociones de igualdad en n-categorías:

- En una 0-categoría (es decir en un conjunto), la noción de equivalencia coincide con la noción de igualdad estricta ya que no hay morfismos que permitan definir una noción más débil de igualdad.
- En una 1-categoría (es decir en una categoría en el sentido habitual del término), la noción de equivalencia entre objetos coincide con la noción de isomorfismo. Ahora existen 1-morfismos para relajar las igualdades estrictas entre objetos, pero no existen 2-morfismos para relajar las igualdades estrictas entre 1-morfismos en la definición de los isomorfismos.

- En una 2-categoría, la noción de equivalencia entre objetos coincide con la *noción de* 1*-morfismo invertible modulo* 2*-isomorfismos*, lo cual significa que las igualdades estrictas entre morfismos en la definición de un isomorfismo son ahora relajadas a 2-isomorfismos.

En general, la definición maximalmente débil de invertibilidad en una n-categoría – es decir, la noción de *equivalencia* – se obtiene reemplazando las identidades estrictas entre k-morfismos por $(k+1)$-morfismos débilmente invertibles hasta el nivel $k = n$ exclusive. En el nivel $k = n$, las correspondientes igualdades entre n-morfismos no pueden más que ser estrictas. De este modo, la noción categórica de igualdad entre k-morfismos en una n-categoría está dada por la existencia de un $(k+1)$-morfismo que es invertible en el sentido maximalmente débil permitido por la existencia de morfismos superiores.

En particular, la noción de *simetría* entendida como un *automorfismo* en una 1-categoría – así como la noción ontológica correspondiente de *identidad* – debe ser generalizada a la noción de *simetría débil* entendida como una *auto-equivalencia* en la correspondiente categoría superior débil.

Vale la pena señalar que dos n-categorías con un número distinto de objetos pueden ser equivalentes[21], lo cual confirma que el referente último del discurso categórico no son los objetos de una categoría sino las estructuras abstractas definidas por medio de la noción de equivalencia. Ahora bien, dichas estructuras abstractas ya no pueden pensarse como clases de equivalencia, es decir como conjuntos de objetos. Las presentaciones concretas de estas estructuras abstractas definidas por las equivalencias categóricas en una n-categoría están dadas por las componentes conexas del n-grupoide subyacente o – aceptando la validez de la así llamada *hipótesis homotópica* propuesta por Grothendieck (que identifica n-categorías con n-tipos de homotopía) – del n-tipo de homotopía asociado. Mientras que en el caso de la abstracción fregeana los casos de la noción abstracta producida por la abstracción están dados por conjuntos – es decir por tipos de homotopía X tales que $\pi_k(X) = 0$ para todo $k > 0$ –, en el caso de la abstracción constructiva dichos casos están dados por tipos de homotopía conexos no limitados por ninguna otra condición de truncación.

7. Categorías como álgebras sobre una mónada

A los efectos de preparar el terreno para introducir la definición de una *categoría superior débil* (Sección N°8), introduciremos en esta sección una manera alternativa de caracterizar la noción de categoría, a saber como un *modelo* de una *estructura algebraica* dada por una mónada sobre la categoría $1\text{-}RGSet$ de 1-conjuntos globulares reflexivos (o *grafos dirigidos*

[21]Por ejemplo, la categoría formada por un único objeto a y su morfismo identidad id_a es equivalente al grupoide formado por dos objetos x e y, sus morfismos identidad id_x e id_y y un único isomorfismo $f : x \to y$ (y su inverso $f^{-1} : y \to x$). Ambas categorías tienen conjuntos de objetos y conjuntos de morfismos distintos, pero son equivalentes como categorías. El hecho de que dos categorías con un número distinto de objetos y de morfismos puedan ser equivalentes implica que, estrictamente hablando, una categoría no puede entenderse como una materia conjuntista dotada de una estructura. En los términos de Manin, "The previous remark also places limits on the naive view that categories 'are' special structured sets. In fact, if it is natural to identify categories related by an equivalence (not necessarily bijective on objects) rather than isomorphism, then this view becomes utterly misleading" (Manin, 2003).

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

reflexivos). Esta definición permite entender la noción de categoría en términos de la tríada *datos-estructura-leyes*, es decir como una materia conjuntista subyacente dotada de una estructura que satisface ciertas leyes. A diferencia de un grupo o de un espacio topológico, la materia conjuntista subyacente – o lo que podríamos denominar la *ontología de base* de la teoría – es *bisortal*, es decir compuesta por dos tipos de elementos (objetos y morfismos).

A los efectos de comprender la diferencia entre la definición de una categoría propuesta en la Sección N°2 y la definición que introduciremos ahora, conviene considerar primero la definición de la noción de *grupo*. Un grupo es una terna $(X, \star, e)$ formada por un conjunto subyacente X (que por simplicidad asumiremos finito), una operación binaria asociativa $\star$ cerrada en X y un elemento neutro e tal que todo $g \in X$ tiene una inversa en X (es decir, para todo $g \in X$, existe un elemento $g^{-1} \in X$ tal que $g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$). Para definir una estructura de grupo sobre un conjunto X, podemos proceder de dos maneras. En primer lugar, podemos dar la tabla de multiplicación correspondiente, la cual define el resultado en X de la operación del grupo para cada par ordenado de elementos de X. Alternativamente, es posible definir un grupo especificando cómo cada elemento del *grupo libre*[22] generado por X es *realizado* o *implementado* por medio de un elemento de X, garantizando de este modo que la operación $\star$ es cerrada en X. Formalmente esta segunda definición puede implementarse del modo siguiente. El *functor olvido* $U : Grp \to Set$ que envía un grupo $(X, \star, e)$ a su conjunto subyacente X tiene un adjunto por la izquierda dado por el *functor libre* $F : Set \to Grp$, el cual envía un conjunto X al *grupo libre* $F(X)$ generado por X. Es posible definir un endofunctor $T = U \circ F : Set \to Set$ que transforma un conjunto X en el conjunto subyacente al grupo libre generado por X. Este endofunctor está equipado con dos transformaciones naturales (una *multiplicación* $\mu : T \circ T \Rightarrow T$ y una *unidad* $\eta : id_{Set} \Rightarrow T$) que le dan al endofunctor T estructura de *mónada* (T, μ, η). Un grupo G con conjunto subyacente X puede definirse como un *álgebra sobre dicha mónada*, es decir como un par $(X, \theta : T(X) \to X)$ sujeto a dos condiciones (ver más adelante). La función $\theta : T(X) \to X$ *realiza* o *implementa* cada elemento del conjunto subyacente al grupo libre $F(X)$ generado por X (es decir, cada palabra reducida formada a partir de las letras del alfabeto $X \cup X^{-1}$) como un elemento de X (es decir, como una letra en X). Esta construcción es un ejemplo particular de *álgebra universal* en el que una estructura algebraica es definida como una mónada sobre la categoría Set y los distintos modelos de la estructura algebraica en cuestión están dados por las álgebras sobre dicha mónada.

Similarmente, una categoría puede ser definida como un modelo de la *teoría algebraica de categorías*. La teoría algebraica de categorías está dada por una mónada sobre la categoría de $1\text{-}RGSet$ de 1-*conjuntos globulares reflexivos* de la forma (1). A diferencia de la teoría algebraica de grupos (en la cual la materia conjuntista subyacente está dada por un único conjunto), la materia conjuntista subyacente a la teoría algebraica de categorías es bisortal, lo cual refleja que la ontología de base de la teoría de categorías incluye dos tipos de entidades,

[22] El *grupo libre* generado por un conjunto X es el grupo $F(X)$ cuyo conjunto subyacente consiste en todas las *palabras reducidas* formadas con letras del alfabeto $X \cup X^{-1}$ (donde $X^{-1} = \{x^{-1}/x \in X\}$), donde el elemento neutro del grupo está dado por la palabra vacía. Una palabra se dice *reducida* si no contiene subpalabras de la forma xx^{-1} o $x^{-1}x$ para ningún $x \in X$. La operación de grupo es la concatenación de palabras seguida de la reducción.

los objetos y los morfismos. De manera similar al caso de la teoría algebraica de grupos, es posible definir un *functor olvido* $U : Cat \to 1\text{-}RGSet$ que envía una categoría a su 1-conjunto globular reflexivo subyacente (1) y un *functor libre* $F : 1\text{-}RGSet \to Cat$ (adjunto por la izquierda de U). Este último construye libremente una categoría a partir de un 1-conjunto globular reflexivo agregando todas las composiciones binarias de cualquier profundidad (es decir, composiciones binarias, composiciones binarias de composiciones binarias, etc.) y contrayendo estrictamente – mediante igualdades estrictas "$=$" – las ambigüedades asociadas a los diagramas multicomponibles, como el diagrama (3). Ahora bien, el objetivo de este formalismo no es el de construir una categoría a partir de un 1-conjunto globular reflexivo $\mathbb{G}$, sino el de construir una categoría *que tenga a* $\mathbb{G}$ *como "materia" conjuntista subyacente*. Para ello es necesario de algún modo restringir la "libertad" asociada a la construcción de la categoría $F(\mathbb{G})$. En efecto, la categoría $F(\mathbb{G})$ construida libremente introduciendo todas las composiciones binarias posibles de los morfismos en $\mathbb{G}$ (e imponiendo una contracción estricta) tiene un 1-conjunto globular reflexivo dirigido subyacente que no coincide necesariamente con $\mathbb{G}$. A los efectos de definir una categoría cuya materia conjuntista esté dada por el 1-conjunto globular reflexivo $\mathbb{G}$ de partida es necesario realizar o implementar todos los morfismos introducidos libremente en la construcción de $F(\mathbb{G})$ como morfismos de $\mathbb{G}$. Esta realización de los morfismos de la categoría $F(\mathbb{G})$ como morfismos de $\mathbb{G}$ puede ser formalizada por medio de la noción de *álgebra sobre la mónada* $T = U \circ F$ sobre $1\text{-}RGSet$, es decir como un par $(\mathbb{G}, \theta : T(\mathbb{G}) \to \mathbb{G})$ sujeto a ciertas condiciones.

Consideremos más en detalle los diferentes elementos de esta construcción. A dichos efectos, puede resultar útil pensar a los morfismos de $\mathbb{G}$ como *letras* (e.g. $f, g, h, ...$), a los morfismos de $T(\mathbb{G})$ como *palabras* formadas concatenando dichas letras (e.g. $(f), (g), (h), (gf), (hg), ...$), a los morfismos de $T^2(\mathbb{G})$ como palabras formadas concatenando palabras en $T(\mathbb{G})$ (e.g. $[(f)], [(g)], [(h)], [(g)(f)], [(h)(g)], ...$), etc. La multiplicación $\mu : T \circ T \Rightarrow T$ que define la estructura de mónada sobre el endofunctor T es una estructura adicional sobre $T(\mathbb{G})$ análoga a la existencia de las funciones de composición (2). La componente $\mu_{\mathbb{G}} : T(T(\mathbb{G})) \to T(\mathbb{G})$ de la transformación natural μ establece que toda concatenación binaria de palabras en $T(\mathbb{G})$ (es decir, toda concatenación binaria de concatenaciones binarias de letras en $\mathbb{G}$) es un elemento de $T(\mathbb{G})$ (es decir, una palabra), lo cual está garantizado por el algoritmo de construcción de $T(\mathbb{G})$ como 1-conjunto globular reflexivo subyacente a la categoría libre generada a partir de $\mathbb{G}$. En otros términos, $T(\mathbb{G})$ es un 1-conjunto globular reflexivo enriquecido con una estructura de concatenación de sus palabras que es cerrada en $T(\mathbb{G})$. Dicha multiplicación transforma palabras de palabras en $T^2(\mathbb{G})$ (e.g. $[(h)(g)]$) en palabras $T(\mathbb{G})$ (e.g.(hg)) eliminando paréntesis. La transformación natural $\mu : T \circ T \Rightarrow T$ satisface una *condición de asociatividad* dada por la conmutatividad del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} T^3(\mathbb{G}) & \xrightarrow{\mu_{T(\mathbb{G})}} & T^2(\mathbb{G}) \\ {\scriptstyle T(\mu_{\mathbb{G}})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{\mathbb{G}}} \\ T^2(\mathbb{G}) & \xrightarrow[\mu_{\mathbb{G}}]{} & T(\mathbb{G}) \end{array} \tag{12}$$

La componente $\mu_{\mathbb{G}} : T^2(\mathbb{G}) \to T(\mathbb{G})$ de la transformación natural μ es un morfismo de 1-conjuntos globulares reflexivos en la categoría $1\text{-}RGSet$ (por ejemplo, $[(h)(g)] \mapsto (hg)$). Dado que T es un endofunctor en $1\text{-}RGSet$, T puede aplicarse al morfismo $\mu_{\mathbb{G}}$, lo cual da como resultado un morfismo $T(\mu_{\mathbb{G}}) : T(T^2(\mathbb{G})) \to T(T(\mathbb{G}))$ en $1\text{-}RGSet$ (morfismo vertical izquierdo en el diagrama). Dicho morfismo envía *palabras de (palabras de palabras)* (e.g.

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

$[(...)(...)][(...)]$) en *palabras de (palabras)* convirtiendo cada *(palabra de palabras)* en una *(palabra)* por medio de $\mu_{\mathbb{G}}$ ($[(...)(...)][(...)] \mapsto [...][...]$). En otros términos, el morfismo $T(\mu_{\mathbb{G}})$ transforma *palabras de (palabras de palabras)* en *palabras de (palabras)* componiendo las *(palabras de palabras)* en *(palabras)*, es decir eliminando los paréntesis interiores. Por otra parte, $\mu_{T(\mathbb{G})} : T^2(T(\mathbb{G})) \to T(T(\mathbb{G}))$ es la componente $T(\mathbb{G})$ de la transformación natural $\mu : T \circ T \Rightarrow T$ (morfismo superior en el diagrama). Este morfismo transforma *palabras de palabras (de palabras)* (e.g. $[(...)(...)][(...)]$) en *palabras (de palabras)* (e.g. $(...)(...)(...)$) eliminando los corchetes. El diagrama (12) afirma que estos dos modos de resolver palabras de tercer orden en palabras coinciden.

La segunda transformación natural que define la estructura de mónada sobre el endofunctor T es la *unidad*

$$\eta : id_{RGSet} \Rightarrow T.$$

Cada componente de esta transformación natural

$$\eta_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to T(\mathbb{G})$$

transforma cada letra f de $\mathbb{G}$ en una palabra (f) compuesta de una única letra en $T(\mathbb{G})$. Esta transformación natural satisface la condición dada por la conmutatividad del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} T(\mathbb{G}) & \xrightarrow{\eta_{T(\mathbb{G})}} & T(T(\mathbb{G})) & \xleftarrow{T(\eta_{\mathbb{G}})} & T(\mathbb{G}) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu_{\mathbb{G}}} & \swarrow & \\ & & T(\mathbb{G}) & & \end{array}$$

En este diagrama, el morfismo $T(\eta_{\mathbb{G}})$ resulta de aplicar el endofunctor T a la componente $\mathbb{G}$ de la transformación natural η, es decir al morfismo $\eta_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to T(\mathbb{G})$ en $1\text{-}RGSet$. Si $\eta_{\mathbb{G}}$ transforma letras en palabras (e.g. $f \mapsto (f)$), $T(\eta_{\mathbb{G}})$ transforma palabras de letras en palabras de palabras transformando cada letra en una palabra por medio de $\eta_{\mathbb{G}}$ (por ejemplo, la palabra (gf) se transforma en $[(g)(f)]$). A su vez la multiplicación $\mu_{\mathbb{G}}$ transforma $[(g)(f)]$ en (gf), por lo cual $\mu_{\mathbb{G}} \circ T(\eta_{\mathbb{G}}) = id_{T(\mathbb{G})}$. Por otra parte, $\eta_{T(\mathbb{G})} : T(\mathbb{G}) \to T(T(\mathbb{G}))$ incluye cada palabra en $T(\mathbb{G})$ como una palabra de palabra en $T(T(\mathbb{G}))$ (por ejemplo $(gf) \mapsto [(gf)]$). Luego la multiplicación $\mu_{\mathbb{G}}$ convierte $[(gf)]$ en (gf), por lo cual $\mu_{\mathbb{G}} \circ \eta_{T(\mathbb{G})} = id_{T(\mathbb{G})}$.

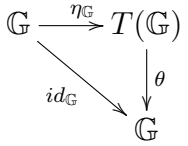
Consideremos ahora la estructura de *álgebra sobre la mónada* T. Una T-álgebra $(\mathbb{G}, \theta : T(\mathbb{G}) \to \mathbb{G})$ debe satisfacer dos condiciones. La primera condición establece que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T(T(\mathbb{G})) & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{G}}} & T(\mathbb{G}) \\ {\scriptstyle T(\theta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ T(\mathbb{G}) & \xrightarrow[\theta]{} & \mathbb{G} \end{array}$$

Este diagrama establece que una *palabra de palabras* (e.g. $[(h)(gf)]$) puede ser transformada en una letra en $\mathbb{G}$ de los dos modos siguientes. Primero, la palabra de palabras $[(h)(gf)]$ en $T^2(\mathbb{G})$ puede ser transformada en una palabra (hgf) en $T(\mathbb{G})$ por medio de la multiplicación $\mu_{\mathbb{G}}$ y luego la palabra resultante transformada en una letra $\theta(hgf)$ en $\mathbb{G}$ por medio de la

acción θ. Segundo, la palabra de palabra $[(h)(gf)]$ en $T^2(\mathbb{G})$ puede ser transformada en una palabra en $T(\mathbb{G})$ transformando cada palabra en una letra por medio de la acción θ (es decir, $[(h)(gf)] \mapsto (\theta(h)\theta(gf))$) y luego la palabra resultante $(\theta(h)\theta(gf))$ en una letra $\theta(\theta(h)\theta(gf))$ en $\mathbb{G}$ aplicando θ nuevamente. La conmutatividad del diagrama establece que $\theta \circ \mu_{\mathbb{G}} = \theta \circ T(\theta)$.

La segunda condición establece que el siguiente diagrama conmuta:



En otros términos, la acción θ debe transformar palabras monolétricas de la forma (f) (es decir, palabras en la imagen de la unidad η) en la letra f de partida.

8. Categorías superiores débiles

En esta sección introduciremos la definición de una *n-categoría débil* propuesta por Penon (1999) (ver también (Cheng y Lauda, 2004; Leinster, 2002)). Vale la pena señalar que existen diversas definiciones de la noción de *n-categoría débil* y que las relaciones entre ellas son un tema de investigación abierto. Sin embargo, y más acá de las dificultades técnicas, la idea central es relativamente simple y se inscribe en la estela de la definición de una categoría como estructura algebraica sobre una materia conjuntista multisortal presentada en la sección precedente.

En la definición de una categoría, el 1-conjunto globular reflexivo enriquecido con las funciones de composición es una estructura sin coherencia alguna ya que los distintos ordenamientos posibles de un diagrama multicomponible no están relacionados entre sí. En el marco de la teoría de categorías y de la teoría de n-categorías *estrictas*, la coherencia requerida está garantizada por la presencia de *leyes* dadas por igualdades estrictas (ley de asociatividad, leyes de identidad, ley de intercambio). En el caso de la teoría de n-categorías *débiles*, dicha coherencia está garantizada por la existencia de *morfismos mediadores* débilmente invertibles (salvo en el nivel superior n donde se deben utilizar igualdades estrictas a falta de morfismos de orden $n+1$ si $n < \omega$). Esto significa que dos ordenamientos distintos del mismo diagrama multicomponible, lejos de ser estrictamente iguales, deberán ser equivalentes (es decir, estar relacionados por un morfismo invertible en el sentido maximalmente débil del término).

En vez de comenzar con un 1-conjunto globular reflexivo (como lo hicimos cuando introdujimos la definición de una categoría en la Sección N°2), comenzaremos con un *n-conjunto globular reflexivo* $\mathbb{G}$. Un *n-conjunto globular reflexivo* es un diagrama de conjuntos C_k (donde los elementos de C_k serán denominados *k-células*) de la forma

$$C_n \underset{t_n}{\overset{s_n}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}}}} i_n \; C_{n-1} \underset{t_{n-1}}{\overset{s_{n-1}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}}}} i_{n-1} \; \cdots \; \underset{t_2}{\overset{s_2}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}}}} i_2 \; C_1 \underset{t_1}{\overset{s_1}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}}}} i_1 \; C_0 \tag{13}$$

que satisface las así llamadas *condiciones de globularidad*:

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

$$s_{k-1}s_k = s_{k-1}t_k, \qquad t_{k-1}s_k = t_{k-1}t_k.$$

Estas condiciones establecen que un k-*morfismo* relaciona dos $(k-1)$-morfismos con el mismo dominio y el mismo codominio respectivamente. Las condiciones de globularidad garantizan que, por ejemplo, un 2-morfismo tiene la siguiente forma "globular":

$$a \overset{f}{\underset{g}{\Downarrow \alpha}} b \tag{14}$$

El carácter *reflexivo* de un n-conjunto globular reflexivo está dado por la existencia de los morfismos i_k en (13), los cuales satisfacen $s_k \circ i_k = t_k \circ i_k = id_{C_{k-1}}$. Los morfismos i_k asignan a cada $(k-1)$-morfismo α un k-*morfismo identidad* putativo $i_k(\alpha) = \mathrm{id}_\alpha$.

Definiremos ahora la categoría $\mathcal{Q}$ de los n-*magmas débilmente contraídos*. Un n-magma débilmente contraído es un cuádruple $(\pi : \mathbb{G} \to S, \gamma)$ formado por:

- un n-*magma* $\mathbb{G}$;
- una n-*categoría estricta* S;
- una *proyección* $\pi : \mathbb{G} \to S$ (un mapa de magmas entre $\mathbb{G}$ y el magma subyacente de S);
- una *contracción débil* γ.

Una n-*categoría estricta* es un n-conjunto globular reflexivo dotado de funciones de composición binaria

$$\circ_p^k : C_k \times_{C_p} C_k \to C_k$$

para cada par (k, p) con $0 \leqslant p < k < n$[23]. Estas funciones satisfacen ciertas condiciones que determinan el dominio y el codominio de los morfismos compuestos[24]. La función de composición

[23] En esta expresión, $C_k \times_{C_p} C_k$ denota el pullback

$$\begin{array}{ccc} C_k \times_{C_p} C_k & \longrightarrow & C_k \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s^{k-p}} \\ C_k & \xrightarrow[t^{k-p}]{} & C_p \end{array}$$

[24] Estas condiciones son las siguientes. Para $p = k-1$, dado $(a, b) \in C_k \times_{C_p} C_k$,

$$s(b \circ_p^k a) = s(a); \qquad t(b \circ_p^k a) = t(b).$$

(un ejemplo de este caso es la composición vertical de dos 2-morfismos donde la fuente del morfismo compuesto es la fuente del primer 2-morfismo y el blanco del morfismo compuesto es el blanco del segundo). Para $p < k-1$, dado $(a, b) \in C_k \times_{C(p)} C_k$,

$$s(b \circ_p^k a) = s(b) \circ_p^{k-1} s(a); \qquad t(b \circ_p^k a) = t(b) \circ_p^{k-1} t(a).$$

(un ejemplo de este caso es la composición horizontal de dos 2-morfismos donde la fuente del morfismo compuesto está dada por la composición de las fuentes de los dos morfismos y análogamente para el blanco).

binaria $\circ_p^k$ compone k-morfismos cuando estos están concatenados a lo largo de un p-morfismo. En otros términos, dos k-morphismos α y α' son p-componibles si $t^{k-p}(\alpha) = s^{k-p}(\alpha')$, en cuyo caso el k-morfismo compuesto se denotará $\alpha' \circ_p^k \alpha$[25]. Además, una n-categoría estricta está dotada de leyes que garantizan la coherencia estricta de la estructura, como la ley de asociatividad, las leyes de identidad, la ley de intercambio (Leinster, 2002, p. 8).

Un *n-magma* es un conjunto globular reflexivo dotado de dichas composiciones binarias y de las condiciones que determinan el dominio y el codominio de los morfismos compuestos, *pero sin ninguna ley que garantice la coherencia de la estructura*. Un n-magma carece de coherencia en el sentido de que no existen leyes o estructuras que fijen las relaciones entre las *diferentes composiciones* posibles de un mismo *diagrama multicomponible*.

Una *contracción débil* γ es una aplicación que asigna a cada par de k-morfismos paralelos (α, β) (para $k < n$) en el n-magma $\mathbb{G}$ que se proyectan via $\pi_{\mathbb{G}}$ al mismo morfismo en la n-categoría estricta S un $(k+1)$-morfismo mediador $[\alpha, \beta] : \alpha \to \beta$ débilmente invertible (tal que $\pi_{\mathbb{G}}([\alpha, \beta]) = id_{\pi_{\mathbb{G}}(\alpha)} = id_{\pi_{\mathbb{G}}(\beta)}$). Para todo morfismo α, el morfismo mediador $[\alpha, \alpha]$ es definido como $[\alpha, \alpha] = id_\alpha$. Conceptualmente, k-morfismos diferentes en el n-magma $\mathbb{G}$ que son estrictamente iguales en la categoría estricta S quedan débilmente igualados gracias a la contracción débil γ por un $(k+1)$-morfismo mediador débilmente invertible. Dado que en una n-categoría no existen $n+1$ morfismos, se asume la condición según la cual la proyección $\pi_{\mathbb{G}}$ es *tame*, lo cual significa que dados dos n-morfismos paralelos (λ, σ) que se proyectan via $\pi_{\mathbb{G}}$ al mismo morfismo en S, vale la igualdad estricta $\lambda = \sigma$.

Dado un n-magma débilmente contraído $Q = (\pi : \mathbb{G} \to S, \gamma)$ es posible definir un *functor olvido*

$$\begin{aligned} U : \mathcal{Q} &\to n\text{-}RGSet \\ (\pi : \mathbb{G} \to S, \gamma) &\mapsto \mathbb{G} \end{aligned}$$

que extrae por así decir el n-conjunto globular reflexivo subyacente al n-magma $\mathbb{G}$. Ahora bien, es posible definir un *functor libre* F adjunto a izquierda del functor olvido U. El functor F transforma un n-conjunto globular reflexivo $\mathbb{G}$ en un n-magma débilmente contraído $F(\mathbb{G}) = (\pi_{\mathbb{G}} : \mathbb{G}^\sharp \to \mathbb{G}^*, \gamma_{\mathbb{G}})$ (donde hemos utilizado la nomenclatura de Leinster (2002)) definido del modo siguiente. El n-magma de $\mathbb{G}^\sharp$ está dado por el n-conjunto globular reflexivo $\mathbb{G}$ enriquecido libremente con todas las composiciones binarias necesarias para garantizar la estructura de magma. A partir de dicho n-magma es posible construir una n-categoría estricta $\mathbb{G}^*$ imponiendo igualdades estrictas entre pares de morfismos paralelos en el magma $\mathbb{G}^\sharp$ que resultan de componer un mismo diagrama según sus distintos ordenamientos posibles. La contracción débil $\gamma_{\mathbb{G}}$ agrega un morfismo mediador débilmente invertible para cada par de morfismos paralelos en el n-magma $\mathbb{G}^\sharp$ proyectados al mismo morfismo en la n-categoría estricta $\mathbb{G}^*$. El "espacio" de los diferentes ordenamientos de un mismo diagrama multicomponible de k-morfismos es entonces *contraíble* en el sentido de que cualquier par de "puntos" en ese "espacio" – es decir, cualquier par de ordenamientos distintos del mismo diagrama multicomponible – están igualados por un $(k+1)$-morfismo débilmente invertible que actúe como mediador[26].

[25] En esta notación, la noción de composición usual en la teoría de 1-categorías se escribirá $\circ_0^1$ (composición de 1-morfismos a lo largo de objetos – entidades en el nivel 0 – en común).

[26] El rol esencial jugado por la condición de *contractibilidad débil* fue subrayado por Riehl en los términos siguientes: "Historical experience suggests, however, that the most exotic mathematics of today will eventually be thought of as easy enough to teach to mathematics undergraduates in the future. It is fun to speculate,

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

Vale la pena señalar que la *estructura de magma* (que define las *composiciones binarias*) y la *contracción débil* (que garantiza la *coherencia débil* del conjunto) están intricadas, ya que la contracción agrega nuevos morfismos mediadores que entrarán a su vez en nuevas composiciones binarias que podrán requerir nuevos morfismos mediadores (Cottrell, 2018). De este modo, podríamos decir que la estructura *fluye hacia arriba*, generando recursivamente niveles superiores de morfismos, tanto para garantizar la existencia de composiciones binarias como para preservar la coherencia débil del conjunto. En cada nivel k, nuevos morfismos pueden ser necesarios para contraer $(k-1)$-morfismos paralelos que se proyectan sobre el mismo morfismo en la categoría estricta $\mathbb{G}^*$ o para garantizar la existencia de composiciones binarias de k-morfismos. Ahora bien, mientras que los nuevos morfismos mediadores requeridos por la contracción débil en un nivel k dependen del nivel $k-1$, las nuevas composiciones binarias en el nivel k dependen de los morfismos en el mismo nivel k. Es entonces posible tener en cuenta la intricación entre la estructura de magma y la contracción débil procediendo nivel por nivel a partir del nivel $k=1$ y tratando la contracción débil primero y la estructura de magma después.

En el nivel $k=1$, por ejemplo, no es necesario introducir 1-morfismos mediadores entre objetos, ya que la proyección $\pi_{\mathbb{G}}$ actúa como una identidad sobre los objetos (todos los objetos son paralelos, pero no existen dos objetos que se proyecten sobre el mismo objeto en la categoría estricta $\mathbb{G}^*$). Por el contrario, es necesario introducir 1-morfismos asociados a composiciones binarias de 1-morfismos. Por ejemplo, si en el conjunto globular reflexivo de partida hay una serie de 1-morfismos de la forma (3), será necesario introducir los morfismos hg, gf, $(hg)f$ y $h(gf)$. Consideremos ahora el nivel $k=2$, tratando primero la contracción débil y luego la estructura de magma. En lo que a la contracción respecta, será necesario introducir un 2-morfismo mediador para cada par de 1-morfismos paralelos que se proyecten via $\pi_{\mathbb{G}}$ al mismo 1-morfismo en la categoría estricta $\mathbb{G}^*$. Por ejemplo, será necesario agregar un 2-morfismo mediador

$$ass_{h,g,f} : (hg)f \Rightarrow h(gf),$$

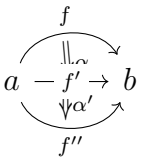
llamado *associator*. Similarmente, para cada 1-morfismo $f : a \to b$, será necesario agregar 2-morfismos mediadores de la forma

$$unit^r_f : f \circ id_a \Rightarrow f, \qquad unit^l_f : id_b \circ f \Rightarrow f,$$

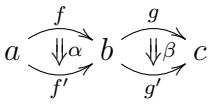
llamados *right* y *left unitors* respectivamente. Será también necesario agregar las 2-identidades putativas asociadas a los nuevos 1-morfismos introducidos en el paso previo. Vale la pena señalar que dichas identidades putativas – necesarias para garantizar la estructura de conjunto globular reflexivo – son automáticamente introducidas como parte de la contracción débil gracias al hecho de que la expresión $[\alpha, \alpha] = id_\alpha$ forma parte de la definición de una contracción. Una vez agregados los nuevos 2-morfismos mediadores requeridos por la contracción débil, podemos

as a researcher in ∞-category theory, about how this subject could be simplified. In this case, there is a linguistic trick [...] that could make ∞-categories as easy for late 21st-century undergraduates to think about as ordinary categories are today. The key axiom in an ordinary category is the existence of a unique composite transformation $g \circ f : X \to Z$ for each composable pair of transformations $f : X \to Y$ and $g : Y \to Z$, chosen from all the elements of the set of transformations from X to Z. In contrast, in an ∞-category, there is a space of arrows leading from X to Z, which in the fundamental ∞-groupoid can be understood as a kind of 'path space.' The correct analogue of the uniqueness of composites in an ordinary category is the assertion that in an ∞-category, the space of composites is 'contractible,' meaning that each of its points can be continuously collapsed via a reverse big bang to a single point of origin" (Riehl, 2021).

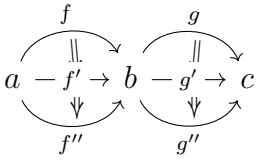
considerar la estructura de magma. Es ahora necesario agregar un 2-morfismo para cada par de 2-morfismos componibles (incluyendo los nuevos 2-morfismos mediadores). Por ejemplo, dados dos 2-morfismos α y α' que comparten un 1-morfismo f' del modo siguiente:



será necesario agregar un 2-morfismo $\alpha' \circ_1^2 \alpha : f \Rightarrow f''$ correspondiente a la composición vertical de α y α'. Por otra parte, dados dos 2-morfismos que comparten un objeto del modo siguiente



será necesario agregar un 2-morfismo $\beta \circ_0^2 \alpha : g \circ f \Rightarrow g' \circ f'$ correspondiente a la composición horizontal de α y β. Consideremos ahora el nivel $k = 3$. En primer lugar, es necesario agregar 3-morfismos mediadores que garantizan que las 2-identidades putativas introducidas en el paso previo se comportan efectivamente como identidades. Puede también ser necesario agregar 3-morfismos mediadores para garantizar (por ejemplo) que las dos composiciones posibles de 2-morfismos en el siguiente diagrama son equivalentes:



Este diagrama requiere introducir un 3-morfismo mediador entre los 2-morfismos del tipo $g \circ f \Rightarrow g'' \circ f''$ siguientes:

$$(\alpha' \circ_1^2 \alpha) \circ_0^2 (\beta' \circ_1^2 \beta) \tag{15}$$

(en el cual las composiciones verticales se realizan primero y la horizontal después) y

$$(\beta' \circ_0^2 \alpha') \circ_1^2 (\beta \circ_0^2 \alpha) \tag{16}$$

(en el cual las composiciones horizontales se realizan primero y la vertical después)[27]. Una vez introducidos todos los 3-morfismos mediadores necesarios, es necesario agregar todos los 3-morfismos de composición requeridos por la estructura de magma.

Ahora bien, como ya lo dijimos para el caso de la definición de una categoría como un álgebra sobre una mónada (Sección N°7), el n-conjunto globular reflexivo subyacente al

[27]Si se tratase de una 2-categoría, no existen 3-morfismos capaces de mediar entre dichas composiciones, por lo que la única opción es la de imponer la así llamada *ley de intercambio*, la cual asegura que las dos composiciones posibles (15) y (16) del diagrama correspondiente son estrictamente iguales.

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

n-magma débilmente contraído $F(\mathbb{G}) = (\pi_{\mathbb{G}} : \mathbb{G}^\sharp \to \mathbb{G}^*, \gamma_{\mathbb{G}})$ no coincide necesariamente con el n-conjunto globular reflexivo de partida $\mathbb{G}$. Sin embargo, el objetivo es construir una categoría superior débil sobre la "materia" conjuntista multisortal dada por el n-conjunto globular reflexivo de partida $\mathbb{G}$. En consecuencia, es ahora necesario implementar o realizar los k-morfismos en $F(\mathbb{G})$ como k-células del n-conjunto globular reflexivo $\mathbb{G}$. Formalmente, eso puede realizarse (como en el caso de una categoría) introduciendo la noción categórica de *álgebra sobre una mónada*.

La composición del functor libre $F : n\text{-}RGSet \to \mathcal{Q}$ y del functor olvido $U : \mathcal{Q} \to n\text{-}RGSet$ permite definir un endofunctor

$$T = U \circ F : n\text{-}RGSet \to n\text{-}RGSet$$

dotado de una estructura de *mónada*, es decir un endofunctor dotado de dos transformaciones naturales, una *multiplicación* y una *unidad*. Una *n-categoría débil* puede ser definida como una *álgebra sobre la mónada* $T = U \circ F$. Un álgebra sobre la mónada T está dada por un par $(\mathbb{G}, \theta : T(\mathbb{G}) \to \mathbb{G})$ compuesto por un n-conjunto globular reflexivo $\mathbb{G}$ y un morfismo $\theta : T(\mathbb{G}) \to \mathbb{G}$ en $n\text{-}RGSet$ que realiza cada k-célula en el n-conjunto globular reflexivo subyacente al n-magma $\mathbb{G}^\sharp$ como una k-célula de $\mathbb{G}$.

Resumiendo la definición de Penon de una *n-categoría débil*, la noción de *n-conjunto globular reflexivo* provee la materia conjuntista n-sortal sobre la cual se definirá una estructura de n-categoría débil. A partir de dicha "materia conjuntista", el functor libre F construye una n-categoría débil agregando las composiciones binarias requeridas por la estructura de n-categoría y los morfismos mediadores necesarios para dotar de coherencia débil a dicha estructura. Finalmente, la estructura de álgebra sobre una mónada permite realizar cada k-morfismo en $F(\mathbb{G})$ como una célula de la "materia" conjuntista subyacente dada por el n-conjunto globular reflexivo de partida $\mathbb{G}$. Es importante señalar que la estructura de n-categoría débil substituye las leyes que garantizan la coherencia en una categoría estricta extendiendo la estructura por medio de morfismos mediadores. En otros términos, la transición entre *estructuras estrictas* y *estructuras débiles* se realiza substituyendo *leyes* por *estructura*. Podríamos decir que en lugar de imponer a la estructura una *coherencia "jurídica" estricta*, la estructura *autorregula* su propia coherencia mediante un *flujo ascendente* de morfismos superiores. Mientras que una *estructura estricta* puede ser descripta por medio de una tríada *datos-estructura-leyes*, una *ω-estructura débil* puede ser descripta por medio de una díada *datos-estructura*.

9. Conclusión

La teoría de categorías puede ser comprendida – en la estela del artículo fundador de Eilenberg y Mac Lane (1945) — como una *meta-matemática matemática* según la cual cada tipo de estructura matemática está asociado a un *contexto ontológico relacional* dado por una categoría. De acuerdo con los argumentos expuestos precedentemente, la tesis ontológica central de la meta-matemática categórica afirma que los *referentes* (en el sentido fregeano del término [*Bedeutung*]) del discurso matemático son *estructuras matemáticas abstractas*. En la expresión *estructura matemática abstracta*, el término *estructura* tiene un doble significado. Por un lado, hace referencia (asumiendo el sentido bourbakista del término) a los diferentes *tipos de estructura* que se pueden definir sobre una materia conjuntista (e.g. estructura de

grupo, estructura de espacio topológico, estructura de categoría, etc.) y a los *modelos* de cada tipo de estructura. Por otro lado, el término *estructura* hace referencia al concepto abstracto producido por la relación de *isomorfismo* (y, más generalmente, por la relación de *equivalencia*). En este artículo, hemos intentando desplegar ambos sentidos del término *estructura* en un marco conceptual unificado.

La noción bourbakista de *tipo de estructura* puede entenderse en términos de la tríada *datos-estructura-leyes*, donde el término *datos* refiere a una materia conjuntista subyacente (que puede ser multisortal), la *estructura* define el tipo de relaciones entre los elementos de la materia conjuntista que define al objeto matemático en cuestión (e.g. relaciones algebraicas para el caso de una estructura de composición, relaciones de vecindades para el caso de una estructura topológica, etc.) y las *leyes* determinan las propiedades que dicha estructura debe satisfacer.

Ahora bien, los objetos construidos dotando a una materia conjuntista de una estructura no pueden directamente identificarse con los *referentes* del discurso categórico. El término *ontológico* en la caracterización de una categoría como un *contexto ontológico relacional* hace referencia al hecho que una noción ontológica fundamental – a saber, la noción de *identidad* – depende de la categoría en cuestión. Como lo explicamos en la Sección N°3, una de las innovaciones más importantes de la teoría de categorías es el *estiramiento*, *relajamiento* o *debilitamiento* de la noción de *igualdad estricta* "$=$" hacia la noción de *igualdad débil* o *categórica* definida por la noción de *equivalencia* "$\simeq$" (y en el caso particular de 1-categorías por la noción de *isomorfismo*). Dos objetos de una n-categoría numéricamente distintos pueden ser declarados *categóricamente iguales* (o $\simeq$-*indiscernibles*) si se restringe el rango de las propiedades admisibles a las propiedades $\simeq$-invariantes, es decir a las *propiedades categóricas* o *estructurales*. Dicha restricción es concomitante con un proceso de abstracción que produce una noción abstracta, a saber la noción de *estructura abstracta*. Estas estructuras abstractas son generadas a partir de los objetos de la n-categoría asociada al tipo de estructura correspondiente por medio de lo que denominamos *principio constructivo de abstracción* (Catren, 2023, §4 & 5). Según este principio, dos objetos a y b en una n-categoría $\mathcal{C}$ *presentan* la misma estructura abstracta (es decir, un mismo modelo del tipo de estructura correspondiente) si son equivalentes $a \simeq b$, es decir si existe un morfismo entre ellos que sea invertible en el sentido más débil posible permitido por la n-categoría en cuestión. Vale la pena insistir sobre la existencia de tres niveles en la presente discusión (ver Tabla N°1): el *tipo de estructura* (definido por la n-categoría en cuestión), sus *modelos* (las estructuras abstractas particulares del tipo correspondiente), y las *presentaciones* de los modelos dadas por los objetos de la n-categoría (las cuales son categóricamente equivalentes si presentan un mismo modelo).

La dimensión *constructiva* del principio constructivo de abstracción introducido en (Catren, 2023, §4 & 5) (y discutido en la Sección N°4 de este artículo) depende de dos diferencias con respecto a la abstracción fregeana. En primer lugar, los casos de la noción abstracta producida no están dados por conjuntos (como lo son las clases de equivalencia producidas por la abstracción fregeana), sino por las componentes conexas del ∞-grupoide subyacente. Mientras que un conjunto tiene homotopía trivial en todos los niveles mayores que 0, una componente conexa de un ∞-grupoide puede tener grupos de homotopía no triviales en todos los niveles superiores. En segundo lugar, todas las equivalencias que prueban que dos objetos son equivalentes son conservadas. En otros términos, una igualdad categórica es una proposición en el sentido constructivista del término. En la teoría homotópica de tipos, una proposición en

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

Cuadro 1: Tipos de estructura, modelos y presentaciones

Concepto	**Noción matemática**	**Ejemplo**
Tipo de estructura	n-categoría	Estructura de grupo ($n = 1$); estructura de 1-categoría ($n = 2$)
Presentaciones	Objetos de la n-categoría	Grupos ($n = 1$); categorías ($n = 2$)
Modelos (*referentes* fregeanos)	Componentes conexas del n-grupoide subyacente	Grupos modulo isomorfismos ($n = 1$); 1-categorías modulo equivalencias de categorías ($n = 2$)

el sentido constructivista del término es un tipo cuyos términos están dados por las pruebas de que la proposición es verdadera (The Univalent Foundations Program, 2013).

En particular, el carácter constructivo del principio de abstracción utilizado tiene como consecuencia la destrivialización del *principio de identidad* (Sección N°5). En efecto, todo automorfismo de un objeto a es una prueba de que la proposición $\hat{a} =_{cat} \hat{a}$ es verdadera. Este refinamiento constructivo del principio de identidad clásico implica una restricción en cuanto a la *determinación* de la entidad en cuestión. En efecto, $\hat{a}$ solo podrá estar determinado por propiedades estructurales o categóricas, es decir invariantes bajo los automorfismos de a. Así, la determinación de $\hat{a}$ queda sujeta a la condición no trivial de ser compatible con su identidad categórica.

Si aceptamos la caracterización de la teoría de categorías como una meta-matemática *matemática*, entonces las categorías mismas deben ser comprendidas como estructuras matemáticas. Hemos mostrado que la noción de *n-categoría débil* puede ser entendida como un tipo de estructura particular, la cual está definida sobre una materia conjuntista n-sortal dada por un n-conjunto globular reflexivo. Como fue explicado en la Sección N°7, una presentación de un modelo de esta estructura – es decir una n-categoría débil – está dada por un *álgebra sobre una mónada* en la categoría de los n-conjuntos globulares reflexivos. A su vez, las 1-categorías (pequeñas) son objetos de la 2-categoría de categorías Cat. Como lo explicamos en la Sección N°3, el criterio de igualdad en una 2-categoría está dado por los *1-morfismos invertibles modulo 2-isomorfismos*, los cuales son denominados *equivalencia de categorías* en el caso particular de Cat. De este modo, los dos niveles descriptos anteriormente (*tipos de estructura* y *modelos* del tipo correspondiente) se intrican ya que una categoría asociada a un tipo de estructura matemática (como la categoría de grupos) es ella misma una presentación de un modelo de un tipo de estructura (la estructura de categoría) definido *à la* Bourbaki sobre una materia conjuntista bisortal (un 1-conjunto globular reflexivo).

Vale la pena señalar que una categoría construida dotando a una materia conjuntista bisortal de una estructura de categoría es solo una presentación de un modelo de la teoría de categorías, modelo definido como una categoría modulo equivalencias de categorías. Y, como se dijo en la Sección N°3, una categoría modulo equivalencias de categorías no tiene conjuntos subyacentes de objetos y de morfismos. De este modo, el hecho de que un modelo de la teoría

de categorías esté definido modulo equivalencias de categorías actúa retroactivamente sobre el punto de partida, a saber sobre el hecho de que la estructura de categoría esté construida sobre una materia conjuntista. En última instancia, los referentes del discurso matemático – es decir, los modelos de cada tipo de estructura matemática – están dados por las componentes conexas del n-grupoide subyacente a la n-categoría asociada al tipo de estructura matemática en cuestión.

Referencias

Ahrens, B., Kapulkin, K. y Shulman, M. (2015). Univalent Categories and the Rezk Completion. *Math. Struct. Comput. Sci.*, 25, 1010–1039.

Anel, M. y Joyal, A. (2021). Topo-logic. En M. Anel y G. Catren (Eds.), *New Spaces in Mathematics. Formal and Conceptual Reflections*. Cambridge: Cambridge University Press.

Angelelli, I. (1984). Frege and Abstraction. *Philosophia Naturalis*, 21, 453–471.

Awodey, S. (1996). Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective. *Philosophia Mathematica*, 3, 209–237.

Awodey, S. (2004). An Answer to Hellman's Question: Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism. *Philosophia Mathematica*, 12, 54–64.

Awodey, S. (2006). *Category Theory*. New York: Oxford University Press.

Awodey, S. (2014). Structuralism, Invariance, and Univalence. *Philosophia Mathematica*, 22(1), 1–11.

Bell, J.L. (1981). Category Theory and the Foundations of Mathematics. *British Journal for the Philosophy of Science*, 32, 349–358.

Bell, J.L. (1986). From Absolute to Local Mathematics. *Synthese*, 69(3), 409–426.

Bell, J.L. (2006). Abstract and Variable Sets in Category Theory. En G. Sica (Ed.), *What is Category Theory?* Milan: Polimetrica.

Bell, J.L. (2020). Reflections on Bourbaki's Notion of "Structure" and Categories. En A. Peruzzi y S. Zipoli Caiani (Eds.), *Structures Mères: Semantics, Mathematics, and Cognitive Science*. Cham, Switzerland: Springer.

Benacerraf, P. (1965). What Numbers Could Not Be. *The Philosophical Review*, 74(1), 47–73.

Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics. *American Mathematical Monthly*, 57, 221–232.

Catren, G. (2023). Abstraction, Equality, and Univalence. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 381(2255).

Cheng, E. (2022). *The Joy of Abstraction: An Exploration of Math, Category Theory, and Life*. Cambridge University Press.

Cheng, E. y Lauda, A. (2004). *Higher-Dimensional Categories: An Illustrated Guide Book*.

Corry, L. (1992). Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure. *Synthese* 92, 315–348.

Corry, L. (2004). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures* (second edition). Basel: Birkhäuser Basel.

Cottrell, T. (2018). A Study of Penon Weak n-Categories, Part 1, Monad Interleaving. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, LIX-3.

Dubuc, E. (2014). Categorías. Los 30 primeros años. ArXiv:1404.6240 [math.HO].

Eilenberg, S. y Mac Lane, S. (1945). A General Theory of Natural Equivalences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58, 231–294.

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

Ellerman, D.P. (1988). Category Theory and Concrete Universals. *Erkenntnis (1975-)*, 28(3), 409–429.

Feferman, S. (1977). Categorical Foundations and Foundations of Category Theory. En R.E. Butts y J. Hintikka (Eds.), *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory* (pp. 149–169). Dordrecht: Reidel.

Frege, G. (1960). On Sense and Reference. En P. Geach y M. Black (Eds. y Trads.), *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Oxford: Basil Blackwell.

Frege, G. (1972). Conceptual Notation: A Formula Language of Pure Thought Modeled upon the Formula Language of Arithmetic [Begriffsschrift]. En *Conceptual Notation and Related Articles* (T.W. Bynum, Trad.). Oxford: Clarendon Press.

Frege, G. (1980). *Philosophical and Mathematical Correspondence* (G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel y A. Veraart, Eds.; H. Kaal, Trad.). Oxford, UK: Basil Blackwell.

French, S. y Krause, D. (2006). *Identity in Physics. A Historical, Philosophical, and Formal Analysis*. New York: Oxford University Press.

Girard, J.-Y. (1989). *Proofs and Types* (P. Taylor y Y. Lafont, Trads.). Cambridge University Press.

Grothendieck, A. (1957). Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Mathematical Journal*, 9, 119–221.

Heinzmann, G. y Petitot, J. (2020). The Functional Role of Structures in Bourbaki. En E.H. Reck y G. Schiemer (Eds.), *The Prehistory of Mathematical Structuralism* (pp. 187–214). Oxford: Oxford University Press.

Hellman, G. (2003). Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism? *Philosophia Mathematica*, 11(3), 129–157.

The Univalent Foundations Program. Institute for Advanced Study (2013). *Homotopy Type Theory. Univalent Foundations of Mathematics*.

Kant, I. (1781/2002). *Theoretical Philosophy after 1781* (H. Allison y P. Heath, Eds.; G. Hatfield, M. Friedman, H. Allison y P. Heath, Trads.). Cambridge University Press.

Krömer, R. (2007). *Tool and Object. A History and Philosophy of Category Theory*. Basel: Birkhäuser, Verlag.

Lambek, J. (1982). What is the World of Mathematics? *Annals of Pure and Applied Logic*, 126(1-3), 149–158.

Landry, E. (1999). Category Theory as a Framework for Mathematical Structuralism. *The 1998 Annual Proceedings of the Canadian Society for the History and Philosophy of Mathematics*, 133–142.

Landry, E. (2006). Category Theory as a Framework for an in re Interpretation of Mathematical Structuralism. En Johan van Benthem, Gerhard Heinzmann, Manuel Rebuschi y Henk Visser (Eds.), *The Age of Alternative Logics: Assessing Philosophy of Logic and Mathematics Today* (pp. 163–179). Dordrecht: Springer Netherlands.

Landry, E. (Ed.). (2017). *Categories for the Working Philosopher*. Oxford: Oxford University Press.

Landry, E. y Marquis, J.-P. (2005). Categories in Context: Historical, Foundational, and Philosophical. *Philosophia Mathematica*, (III)13, 1–43.

Lawvere, F.W. y Rosebrugh, R. (2003). *Sets for Mathematics*. Cambridge University Press.

Leinster, T. (2002). A Survey of Definitions of n-Category. *Theory and Applications of Categories*, 10(1), 1–70.

Leinster, T. (2014). *Basic Category Theory*. Cambridge University Press.

Linnebo, Ø. y Pettigrew, R. (2011). Category Theory as an Autonomous Foundation. *Philosophia Mathematica*, 19(3), 227–254.

Mac Lane, S. (1986). *Mathematics, Form and Function*. New York: Springer.

Mac Lane, S. (1996). Structure in Mathematics. *Philosophia Mathematica*, 4(2), 174–183.

Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician* (2nd edition). New York: Springer-Verlag.

Mancosu P. (2016). *Abstraction and Infinity*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Manin, Y.I. (2003). Georg Cantor and His Heritage, talk at the meeting of the German Mathematical Society and the Cantor Medal Award Ceremony, arXiv:math/0209244 [math.AG].

Mazur, B. (2009). When is One Thing Equal to Some Other Thing? En B. Gold y R. Simons (Eds.), *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy* (pp. 221–241). The Mathematical Association of America.

McLarty, C. (1990). The Uses and Abuses of the History of Topos Theory. *Brit. J. Phil. Sci.*, 41, 351–375.

McLarty, C. (1993). Numbers Can Be Just What They Have To. *Nous*, 27, 487–498.

McLarty, C. (2004). Exploring Categorical Structuralism. *Philosophia Mathematica*, 12(3), 37–53.

McLarty, C. (2005). Learning from Questions on Categorical Foundations. *Philosophia Mathematica*, 13(1), 44–60.

Makkai, M. (1998). Towards a Categorical Foundation of Mathematics. *Lecture Notes in Logic* (Volume 11). Berlin: Springer, 153–190.

Marquis, J.-P. (2006). Categories, Sets and the Nature of Mathematical Entities. En J. van Benthem, G. Heinzmann, Ph. Nabonnand, M. Rebuschi y H. Visser (Eds.), *The Age of Alternative Logics. Assessing philosophy of logic and mathematics today* (pp. 181–192). Springer.

Marquis, J.-P. (2009). *From a Geometrical Point of View. A Study of the History and Philosophy of Category Theory*. Dordrecht: Springer.

Marquis, J.-P. (2013). Categorical Foundations of Mathematics: Or How to Provide Foundations for Abstract Mathematics. *The Review of Symbolic Logic*, 6, 51–75.

Marquis, J.-P. (2015). Category Theory. En Edward N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2015 Edition).

Marquis, J.-P. (2020). Forms of Structuralism: Bourbaki and the Philosophers. En A. Peruzzi y S. Zipoli Caiani (Eds.), *Structures Mères: Semantics, Mathematics, and Cognitive Science*. Cham, Switzerland: Springer.

Marquis, J.-P. (2022). The Structuralist Mathematical Style: Bourbaki as a Case Study. En G. Oliveri, C. Ternullo y S. Boscolo (Eds.), *Objects, Structures, and Logics. FilMat Studies in the Philosophy of Mathematics*, Boston Studies in the Philosophy and History of Science (pp. 199–231). Cham, Switzerland: Springer.

Martin-Löf, P. (2021). The Sense/Reference Distinction in Constructive Semantics. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 27(4), 501–513.

Pedroso, M. (2009). On Three Arguments Against Categorical Structuralism. *Synthese*, 170, 21–31.

Penon, J. (1999). Approche polygraphique des ∞-catégories non strictes. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, XL-1:31–80.

Quine, W.V. (1950). *Methods of Logic*. Harvard University Press.

Quine, W.V. (1960). *Word and Object*. Cambridge, Massachusetts : The MIT Press.

© 2026 G. Catren | CC BY 4.0 | doi.org/10.35588/cc.v7d8359

Quine, W.V. (1969). *Ontological Relativity and Other Essays*. New York: Columbia University Press.
Reck, E.H. y Schiemer, G. (Eds.). (2020). *The Prehistory of Mathematical Structuralism*. Oxford: Oxford University Press.
Reck, E. y Schiemer, G. (2025). Structuralism in the Philosophy of Mathematics. En Edward N. Zalta y Uri Nodelman (Eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2025 Edition).
Resnik, M.D. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Oxford University Press.
Riehl, E. (2016). *Category Theory in Context*. Dover.
Riehl, E. (2021). Infinity Category Theory Offers a Bird's-Eye View of Mathematics. *Scientific American Magazine*, 325(4).
Rijke, E. (2025). *Introduction to Homotopy Type Theory*. Cambridge University Press.
Rodin, A. (2011). Categories Without Structures. *Philosophia Mathematica*, (III) 19, 20–46.
Rodin, A. (2014). *Axiomatic Method and Category Theory*. Springer International Publishing Switzerland.
Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford: Oxford University Press.
Shapiro, S. (2005). Categories, Structures, and the Frege-Hilbert Controversy: The Status of Meta-Mathematics. *Philosophia Mathematica*, 13(1), 61–77.
Shulman, M. (2017). Homotopy Type Theory: A Synthetic Approach to Higher Equalities. En E. Landry (Ed.), *Categories for the Working Philosopher*. Oxford: Oxford University Press.
Weyl, H. (1952). *Symmetry*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
Whitehead, A.N. (1898). *A Treatise on Universal Algebra*. Cambridge University Press.
Wittgenstein, L. (1993). *Tractatus Logico-Philosophicus* (G.-G. Granger, Trad.). Paris: Editions Gallimard.