



Mereologías cuánticas y casi-conjuntos

Quantum Mereology and Quasi-Sets

Mereologias quânticas e quase-conjuntos

Juan Pablo Jorge

Instituto Alejandro Korn, Universidad de Buenos Aires, Argentina

jorgejpablo@gmail.com

0000-0003-4517-8729 

→ **Recibido:** 16/11/2025

→ **Aceptado:** 25/01/2026

→ **Publicado:** 11/09/2026

→ **Artículo Dossier II**

"Filosofía y Fundamentos de la Física"

© 2026 Juan Pablo Jorge

CC BY 4.0

→ **Cómo citar:** Jorge, J. P. (2026). Mereologías cuánticas y casi-conjuntos. *Culturas Científicas*, 7(1), pp.59–86. doi.org/10.35588/cc.v7d8354

[RESUMEN]

la mereología se ocupa del estudio de las relaciones entre el todo y las partes. En este trabajo, discutimos diferentes desarrollos y problemas abiertos relacionados con la formulación de una *mereología cuántica*. En particular, discutiremos diferentes avances en el desarrollo de sistemas formales destinados a describir la relación todo-partes en el contexto de la teoría cuántica. Dado que se supone que los sistemas físicos macroscópicos están compuestos por muchos sistemas cuánticos, comprender los desafíos asociados al desarrollo de una mereología cuántica es relevante para el problema de explicar el surgimiento de una realidad clásica macroscópica a partir de un reino cuántico microscópico. Se aborda esta cuestión desde la perspectiva de dos teorías de conjuntos inspiradas en la ontología cuántica, las teorías de casi-conjuntos sin átomos Ω^- y la de quasetes QST, y también desde un formalismo mereológico motivado por los entes del micromundo (ZF^*). Todos estos sistemas se caracterizan, a diferencia de ZF, por cierto grado de no extensionalidad. Para nosotros, la no extensionalidad es una característica indispensable de los formalismos que quieran dar cuenta de las peculiaridades de los entes cuánticos. Se relacionan estos formalismos y dejan algunas cuestiones abiertas, que pueden marcar nuevos rumbos en el desarrollo de futuras mereologías para la Mecánica cuántica.

[PALABRAS CLAVES]

Mereología, Casi-conjuntos, Quasets, Indiscernibilidad, ZF.

[ABSTRACT]

Mereology deals with the study of the relationships between the whole and the parts. In this work, we discuss different developments and open problems related to the formulation of a *quantum mereology*. In particular, we will discuss different advances in the development of formal systems aimed at describing the whole-parts relationship in the context of quantum theory. Since macroscopic physical systems are assumed to be composed of many quantum systems, understanding the challenges associated with the development of a quantum mereology is relevant to the problem of explaining the emergence of a macroscopic classical reality from a microscopic quantum realm. This question is addressed from the perspective of two set theories inspired by quantum ontology: the theories of quasi-sets without atoms (Ω^-) and the quaset theory (QST), and also from a mereological formalism motivated by entities in the microworld (ZF^*). All these systems are characterized, unlike ZF, by a certain degree of non-extensionality. For us, non-extensionality is an indispensable characteristic of formalisms that aim to account for the peculiarities of quantum entities. These formalisms are related, and some questions remain open, which may point to new directions in the development of future mereologies for quantum mechanics.

[KEY WORDS]

Mereology, Qsets, Quasets, Indiscernibility, ZF.

1. Problemas abiertos e implicaciones ontológicas

Como dejará claro nuestro trabajo, la noción de “parte componente” necesita ser examinada críticamente debido a las características peculiares de los sistemas cuánticos. Este análisis también tiene implicaciones para la discusión sobre si es posible describir un sistema macroscópico; por ejemplo, un aparato de medición, como una simple colección de partículas, átomos o moléculas elementales, que interactúan solo a través de una evolución unitaria. Este punto de vista se encuentra en la base del llamado *problema de medición*. Su formulación misma implícitamente asume que la mecánica cuántica debería ser “universal”. Se sabe que la suposición de que todo puede reducirse a una simple colección de entidades elementales que interactúan, reunidas como un todo simple, *partes extra partes*, es muy problemática. Hay mucha evidencia de que se trata de un supuesto ingenuo, incluso cuando se intenta reducir la termodinámica a la física clásica apelando a la mecánica estadística. Como veremos más adelante, el enfoque “*partes extra partes*” parece ser incompatible con las principales características de la teoría cuántica. Cuando los sistemas cuánticos se consideran agregados, pueden mostrar varias características que no tienen analogía en la física clásica. Nos centramos en tres características centrales de la mecánica cuántica que son, desde un punto de vista conceptual, diferentes.

La primera es el entrelazamiento: la información del todo no se puede recuperar en términos de la de sus partes. Esta característica dio lugar a múltiples desarrollos que permiten caracterizar, desde un punto de vista lógico, el problema de la inseparabilidad cuántica (Holik et al. (2013)). La segunda característica consiste en que los sistemas cuánticos del mismo tipo pueden prepararse en situaciones en las que se vuelven completamente indiscernibles (ver French and Krause (2006)). Las teorías de quasi-sets (indistintamente casi-conjuntos o cuasiconjuntos) $\mathfrak{Q}$ (con átomos) y $\mathfrak{Q}^-$ (sin átomos) (French and Krause (2006); Krause (1992); Krause and Jorge (2024); Krause et al. (2025)) son ejemplos de sistemas formales que permiten captar la idea de colecciones de entidades que son verdaderamente indiscernibles. En este trabajo, también revisaremos la teoría de quasetes QST (Dalla Chiara and Toraldo di Francia (1993); Dalla Chiara et al. (1998); Jorge and Holik (2023); Jorge et al. (2025)), que es otro sistema formal destinado a abordar las propiedades de las entidades cuánticas.

Utilizando estas teorías inspiradas en la ontología cuántica, junto con la mereología cuántica ZF^* (da Costa and Holik (2015)), analizaremos la posibilidad de preparar superposiciones de estados con diferente número de partículas. Este es el caso, por ejemplo, de los estados cuánticos coherentes del campo electromagnético, que tienen un número indefinido de fotones. Esta característica es particularmente desafiante para el desarrollo de una mereología cuántica, ya que es difícil capturarla formalmente. Revisaremos enfoques anteriores que abordan este desafío (da Costa and Holik (2015); Domenech and Holik (2007)). Es importante mencionar que también es posible representar un número indefinido de componentes apelando a la construcción de un espacio de Fock utilizando la teoría de cuasiconjuntos (Domenech et al. (2008); Holik et al. (2025)). En el presente trabajo, discutiremos las tres características anteriores a la luz de los sistemas formales mencionados y nuestra presentación seguirá las líneas de Holik and Jorge (2023).

2. Sistemas cuánticos compuestos

La mereología estudia las relaciones entre el todo y sus partes. Existen diferentes sistemas formales para estudiar este problema. En esencia, puede formularse como una teoría matemática sobre el todo y las partes. Nuestro problema aquí es: ¿cómo formular una *merología cuántica*? Para abordarlo, comenzamos primero revisando las principales características de la física de los sistemas cuánticos compuestos. A continuación, revisaremos algunos sistemas formales desarrollados con el objetivo de capturar esas características de manera rigurosa. Esto es relevante para la discusión sobre posibles ontologías para la teoría cuántica, dado que la descripción formal proporciona una caracterización precisa de ciertos conceptos que, en lenguaje natural, sólo pueden formularse de manera intuitiva.

2.1. Estados cuánticos

Un estado (puro) de un sistema cuántico se puede representar formalmente mediante un vector $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$. Como tal, las combinaciones lineales de estados puros (si se normalizan adecuadamente a la unidad) dan lugar a nuevos estados. Si una fuente produce sistemas cuánticos en el estado

$$|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle \quad (1)$$

entonces, si realizamos una medición, obtendremos los resultados asociados a $|a\rangle$ y $|b\rangle$ con probabilidades $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ respectivamente. La ecuación 1 describe lo que se conoce como *estado de superposición*. De manera más general, a los estados se les puede dar una representación matricial utilizando el producto externo:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2)$$

En la representación matricial, las probabilidades se pueden calcular utilizando la regla de Born: $p_a = \text{tr}(\rho|a\rangle\langle a|) = |\alpha|^2$ y $p_b = \text{tr}(\rho|b\rangle\langle b|) = |\beta|^2$.

El estado representado por la ecuación (1) (o (2)) no debe ser confundido por el representado por la matriz:

$$\rho_{inc} = |\alpha|^2|a\rangle\langle a| + |\beta|^2|b\rangle\langle b| \quad (3)$$

A diferencia de ρ , el estado ρ_{inc} es una mezcla no coherente entre $|a\rangle\langle a|$ y $|b\rangle\langle b|$. Como tal, da las mismas probabilidades cuando medimos a y b , pero producirá probabilidades diferentes si se realizan otros experimentos. Por lo tanto, ρ y ρ_{inc} representan *diferentes* estados físicos.

En caso de tener dos sistemas cuánticos *distinguibles* (como un protón y un electrón), si el primer sistema está preparado en el estado $|a\rangle$ y el otro se prepara de forma independiente en el estado $|b\rangle$, el estado del sistema compuesto se puede representar mediante:

$$|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (4)$$

El hecho de que los estados de sistemas compuestos deban construirse utilizando el producto tensorial es un postulado independiente de la mecánica cuántica estándar. Según las reglas de la teoría cuántica, también es posible formar una superposición.

$$|\psi\rangle = \alpha|a\rangle \otimes |b\rangle + \beta|a'\rangle \otimes |b'\rangle$$

con a y b diferentes de a' y b' . Resulta que tal superposición no puede escribirse como un estado de producto (es decir, un estado de la forma $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$). Cuando este es el caso, se dice que el sistema está *entrelazado*. Numerosos experimentos sugieren que la información sobre un estado entrelazado no se puede recuperar a partir de la información contenida en sus partes. Este hecho da lugar al siguiente eslogan:

EL TODO NO ES IGUAL A LA SUMA DE SUS PARTES.

La mayor parte de la literatura existente que aborda el problema del desarrollo de una mereología cuántica se centra únicamente en el estudio de las características de la teoría cuántica relacionadas con el entrelazamiento.

2.2. Indiscernibilidad

Si los sistemas cuánticos considerados son de la misma clase, como es el caso cuando tenemos dos electrones o dos fotones, debemos utilizar el *postulado de simetrización*, y los estados deben ser simetrizados según sea su clase:

Bosones:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle \otimes |b\rangle + |b\rangle \otimes |a\rangle) \quad (5)$$

Fermiones:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle \otimes |b\rangle - |b\rangle \otimes |a\rangle) \quad (6)$$

En el momento de escribir este trabajo, no se conocen otros tipos de sistemas cuánticos en la naturaleza. Toda la evidencia empírica sugiere que existen solo dos clases generales de sistemas cuánticos elementales¹. El postulado de simetrización tiene muchas consecuencias. Posiblemente, la más conocida sea el principio de exclusión de Pauli (Marton et al. (2013)). Pero los condensados de Bose-Einstein también se han vuelto muy relevantes. El postulado de simetrización implica que

LOS SISTEMAS CUÁNTICOS DEL MISMO TIPO SON GENUINAMENTE INDISCERNIBLES.

¹Se ha planteado la hipótesis de una tercera clase de partículas: los anyones son estadísticas fraccionarias de cuasipartículas en dos dimensiones (Wilczek and Devine (1989)) y tienen características que no se ven en bosones o fermiones. Se llaman Anyons porque las partículas pueden obedecer a cualquier estadística, adoptando cualquier fase cuántica al cambiar de posición.

Por supuesto, hay que tomar con cuidado el eslogan. Si un electrón en la Tierra se crea de forma completamente independiente a partir de un electrón en una estrella distante (es decir, un electrón proveniente de una región separada similar al espacio), no pueden tener lugar correlaciones no triviales entre ellos. No hay superposición ni entrelazamiento de funciones de onda entre ellos y, para todos los efectos prácticos, pueden considerarse distinguibles. En otras palabras, considerarlas como distinguibles funciona como una aproximación razonable, ya que todas las correlaciones originadas en la simetrización del estado cuántico son insignificantes. Pero el “para todos los propósitos prácticos” no debe llevar a confusión, debido al siguiente hecho: la indistinguibilidad cuántica está operando de todos modos, porque, si los electrones experimentan un proceso de interacción (algún evento causal que los conecte), podría tener lugar una situación física en la que no existe ninguna forma operativa de determinar cuál es cuál. Esta es una característica puramente cuántica, en el sentido de que no tiene ningún análogo clásico.

La mecánica cuántica prohíbe definir una forma de discernir partículas de la misma clase que se comporte operativamente bien desde el punto de vista ontológico. Los sistemas cuánticos, como dijimos ya en varias oportunidades, no pueden ser considerados como individuos en el sentido habitual: carecen de un “documento de identidad”. Teniendo esto en cuenta, se podría decir que cualquier identidad o etiqueta atribuida a un sistema cuántico es simulada o falsa. Por supuesto, uno puede *imaginar* que los sistemas cuánticos tienen identidades ocultas a las que no se puede acceder (como es el caso, por ejemplo, en algunas versiones de la mecánica de Bohm). Pero, si la teoría cuántica es correcta, existen situaciones en las que esta suposición no tiene correlación con ningún procedimiento empírico. Esta es una característica distintiva de la teoría cuántica: aunque nada nos impide suponer que los sistemas cuánticos son individuos, pueden prepararse en estados en los que cualquier etiqueta que se les atribuya debe estar esencialmente oculta. Por las razones anteriores, la formulación estándar de la teoría cuántica supone que los sistemas cuánticos son indistinguibles en un sentido ontológico profundo. Esta es la intuición que guía a los físicos que trabajan cuando se enfrentan a sistemas cuánticos del mismo tipo. Como vimos en las líneas precedentes y seguiremos desarrollando a continuación, esta intuición se puede formular de forma rigurosa utilizando el marco teórico establecido por Ω .

Antes de continuar, es muy importante hacer la siguiente observación:

Entrelazamiento e indistinguibilidad no son lo mismo y no deben confundirse.

Las ecuaciones (5) y (6) parecen estados entrelazados, pero no puede haber ningún entrelazamiento genuino debido únicamente a la simetrización de un estado. Como ejemplo, para los fermiones, si queremos que tengan entrelazamiento no nulo, necesitamos crear una superposición de dos determinantes de Slater (y la ecuación 6 solo contiene uno). Los detalles técnicos detrás de este hecho están mucho más allá del alcance de este capítulo. Sin embargo, para nuestros propósitos, es importante tener en cuenta lo siguiente:

La indistinguibilidad es, junto con la superposición y el entrelazamiento, una característica física independiente y crucial de los sistemas cuánticos.

La suposición de que los sistemas cuánticos pueden encontrarse en situaciones de total indiscernibilidad conduce naturalmente a la derivación de las llamadas *estadísticas cuánticas*.

Se puede explicar en términos de conteo: si uno tiene dos bosones y dos estados, y fueran distinguibles, existirían cuatro posibilidades. Pero, en el régimen propiamente cuántico, no tiene sentido decir que el bosón A está en el estado 1 y el bosón B está en el estado 2. Como son indistinguibles, esas alternativas clásicas se vuelven una siempre que no se puedan descuidar las correlaciones originadas en la simetrización del estado. Por tanto, para dos bosones y dos estados, solo hay tres configuraciones alternativas (y no cuatro, como en el caso clásico). De manera similar, debido al principio de exclusión de Pauli, no se pueden colocar dos fermiones en el mismo estado. Por lo tanto, para el caso de dos fermiones y dos estados, solo hay una configuración físicamente significativa en el régimen cuántico.

2.3. Número de partículas indeterminado

Con lo visto hasta acá, el lector que no está familiarizado con la teoría cuántica puede sentirse un poco desconcertado. No solo el todo no es igual a la suma de sus partes (algo que ya podría haber incorporado de otros contextos), sino que algunas partes componentes pueden ser indistinguibles en un sentido ontológico profundo. Sin embargo, todavía hay otra característica física crucial que juega un papel importante cuando tratamos con sistemas cuánticos compuestos: es posible preparar sistemas cuánticos en una superposición de diferentes estados numéricos de partículas. Si tomamos la física cuántica literalmente, esto implica que el número de componentes puede ser indefinido en un sentido ontológico. Para ilustrar esto, consideremos primero el estado de dos bosones:

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle \otimes |b\rangle + |b\rangle \otimes |a\rangle) \quad (7)$$

(observe la simetrización). A continuación, consideremos un estado formado por tres bosones:

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|a\rangle \otimes |b\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |a\rangle \otimes |c\rangle + |a\rangle \otimes |c\rangle \otimes |b\rangle + |c\rangle \otimes |b\rangle \otimes |a\rangle + |c\rangle \otimes |a\rangle \otimes |b\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle \otimes |a\rangle)$$

Ahora, según las reglas de la teoría cuántica, nada nos impide formar una superposición coherente entre los estados anteriores:

$$|\psi\rangle = \alpha|2\rangle + \beta|3\rangle \quad (8)$$

Si, dado un sistema preparado en el estado anterior, realizamos una medición del número de partículas, detectaremos dos partículas con probabilidad $|\alpha|^2$, y tres partículas con probabilidad $|\beta|^2$. Siguiendo la interpretación estándar de la teoría cuántica, un sistema preparado en un estado como el dado por la ecuación (8), no tiene un número definido de componentes. Un ejemplo importante es el estado coherente:

$$|\alpha\rangle = \exp^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (9)$$

Es importante recordar aquí la diferencia entre un estado coherente y una mezcla:

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| \neq \exp^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |n\rangle\langle n| \quad (10)$$

Además, los llamados *squeezed states* (Walls (1983)) juegan un papel crucial en las tareas de información cuántica:

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh r^n \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} |2n\rangle \quad (11)$$

Los estados anteriores se preparan diariamente en los laboratorios actuales. A las consideraciones de este apartado, añadimos un nuevo eslogan:

EL NÚMERO DE COMPONENTES PUEDE NO ESTAR DEFINIDO.²

3. Una descripción formal de la relación entre el todo y las partes

Consideremos primero qué sucede con las proposiciones asociadas a sistemas clásicos en el caso compuesto. Para un sistema clásico, si los subsistemas están preparados en los estados $s_1 = (p_1, q_1)$ y $s_2 = (p_2, q_2)$, entonces el estado del sistema compuesto puede describirse mediante el par (s_1, s_2) . En este sentido, la *información* del sistema compuesto es simplemente *la suma de sus partes*.

Cualquier proposición comprobable sobre un sistema físico tiene la forma: “el valor de la cantidad física A se encuentra en el intervalo Δ ”. Para los sistemas clásicos, el conjunto de proposiciones comprobables forma una red distributiva con respecto a los conectivos lógicos clásicos “ $\wedge$ ”, “ $\vee$ ” y “ $\neg$ ”. Para fijar ideas, se pueden representar esas proposiciones como los *subconjuntos medibles* del espacio de fases (según la medida de Lebesgue). En esta representación, los conectivos “ $\wedge$ ”, “ $\vee$ ” y “ $\neg$ ”, están representados por la intersección teórica del conjunto “ $\cap$ ”, la unión “ $\cup$ ”, y el complemento teórico conjunto “ $(\dots)^c$ ”, respectivamente. El diagrama que se muestra en la figura 1 ilustra la relación entre el entramado de proposiciones del sistema compuesto y las de sus subsistemas. Existe un mapa, que es la proyección canónica asociada al producto cartesiano, que establece una correspondencia uno a uno entre estados.

Sin embargo, las proposiciones comprobables asociadas a los sistemas cuánticos tienen una estructura muy diferente. En primer lugar, la forma estándar de describir los sistemas

²¿Cuán relacionada está la indiscernibilidad de los entes cuánticos, junto con su consecuente falta de identidad, con que el número de componentes pueda estar indefinido? Evidentemente, estos temas están fuertemente vinculados y, a nivel formal, esto se refleja en que los axiomas de cardinalidad deban ser agregados de forma independiente en las teorías de cuasiconjuntos (algo que no ocurre en las teorías estándar como ZF). Algún lector de la obra borgeana podría estar recordando el *sofisma de las nueve monedas* de Tlön, Uqbar, Orbis Tertius, donde el maestro Borges nos deja reflexionando sobre las siguientes líneas: *si la igualdad comporta la identidad, habría que admitir asimismo que las nueve monedas son una sola*. En Tlön, al igual que en el micromundo, aunque posiblemente por diferentes razones, existe un problema con la identidad que termina repercutiendo también sobre el concepto de cardinalidad.

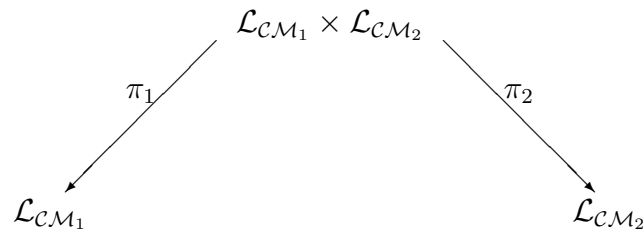


Figura 1: Diferentes mapas entre $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$, y $\mathcal{L}$. π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas.

cuánticos es esencialmente probabilística. En consecuencia, en la mayoría de las circunstancias, la información sobre un sistema cuántico se expresa en términos probabilísticos.

En segundo lugar, además de aquellas propiedades que pueden considerarse “clásicas” (como la carga y la masa en reposo), también podemos hacer afirmaciones como: “el valor del observable A se encuentra en el intervalo Δ ”. En el formalismo cuántico, estas proposiciones comprobables están representadas por subespacios cerrados $P_A(\Delta)$ (o, de manera equivalente, por sus proyecciones ortogonales asociadas). Los representantes matemáticos de las proposiciones de los sistemas cuánticos forman una estructura algebraica conocida como red ortomodular que, a diferencia de su contraparte clásica, no es distributiva. Aquí llamamos $\mathcal{L}_{v\mathcal{N}}$ a esa red.³ En este caso, los conectivos lógicos “ $\wedge$ ”, “ $\vee$ ” y “ $\neg$ ” están representados por la intersección de subespacios lineales cerrados “ $\cap$ ”, suma directa “ $\oplus$ ”, y complemento ortogonal “ $(\dots)^\perp$ ”, respectivamente.

3.1. Mezclas impropias

¿Podemos encontrar mapas como en la Figura 1 para sistemas cuánticos? La situación se muestra en la Figura 2. ¿Podemos encontrar mapas ξ_1 y ξ_2 que conecten los estados del sistema compuesto con los de sus subsistemas? Para responder a esa pregunta, observamos que los estados cuánticos pueden ser *mezclados*. Ilustraremos este concepto considerando un sistema cuántico compuesto donde sus subsistemas son distinguibles (es decir, no son sistemas cuánticos del mismo tipo). Supongamos que el sistema compuesto está en estado entrelazado.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle).$$

Su operador de densidad asociado viene dado por

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{L}_{v\mathcal{N}}$$

Luego, tomando la traza parcial sobre el segundo subsistema, obtenemos que el estado del primer subsistema es

$$\rho_1 = \text{tr}_2(\rho) = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|).$$

³ $v\mathcal{N}$ es debido a von Neumann.

ρ_1 no es un estado puro, ya que está escrito como una combinación convexa no trivial de $|+\rangle\langle+|$ y $|-\rangle\langle-|$. Entonces, no es posible describirlo como un elemento de $\mathcal{L}_{v\mathcal{N}_1}$. Esta es una expresión clara del hecho de que el todo no es la suma de sus partes. Por lo tanto, no es posible utilizar trazas parciales para mapear las propiedades del sistema cuántico compuesto con las propiedades de sus subsistemas, dado que los estados de los subsistemas pueden mezclarse y, por lo tanto, no tienen representantes como elementos de la red de propiedades. Profundicemos un poco en esta característica del formalismo cuántico. Las propiedades reales se definen como aquellas que están asociadas con proposiciones comprobables cuya probabilidad de ocurrencia es igual a uno. Si nos limitamos a estados puros, la conjunción de todas las propiedades reales define el estado del sistema en el siguiente sentido:

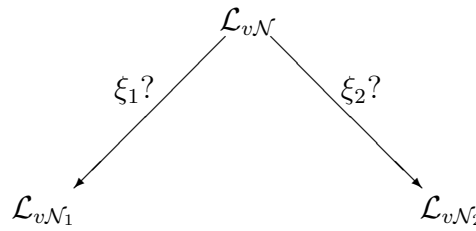


Figura 2: Mapa cuántico

$$\{s\} = \bigwedge \{X \in \mathcal{L}_{v\mathcal{N}} \mid X \text{ es actual}\} \quad (12)$$

La ecuación anterior proporciona la conexión entre estados y propiedades: un estado (puro) puede considerarse como la colección de todas las propiedades que son verdaderas en un momento dado. Pero, dado que los estados de los subsistemas son, en la mayoría de los casos, inevitablemente mezclados, ya no es posible utilizar la ecuación 12 para establecer una conexión entre estados y propiedades. Este hecho impide la posibilidad de encontrar una forma correcta de conectar los estados del todo con los estados de sus partes (al nivel del entramado de proposiciones asociadas a un sistema físico). Una posible solución es extender la noción de proposición asociada a un sistema cuántico a afirmaciones probabilísticas, tales como: "El sistema tiene la propiedad E con probabilidad p ". Así, se puede definir algo como:

$$C_E(p) = \{\rho \in \mathcal{C} \mid \text{tr}(\rho E) = p\} \quad (13)$$

Es posible demostrar que si E es un *efecto cuántico*, $C_E(p)$ es un subconjunto convexo de $\mathcal{C}$. Por lo tanto, considere el siguiente conjunto (que define la colección de todos los posibles operadores densidad que representan estados cuánticos):

$$\mathcal{C} = \{\rho : \rho = \rho^\dagger; \rho \geq 0; \text{tr}(\rho) = 1\}. \quad (14)$$

Las caras de $\mathcal{C}$ forman una red (de forma canónica) que es isomorfa a la red ortomodular de los operadores de proyección. En Holik et al. (2012), se propuso considerar una red formada por subconjuntos convexos de $\mathcal{C}$. Las operaciones se definen de la siguiente manera.

Definición 3.1 $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} := \{C \subseteq \mathcal{C} : C \text{ es un subconjunto convexo de } \mathcal{C}\}$

Para dotar a este conjunto de una estructura reticular, introducimos las siguientes operaciones en $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ (donde $\text{conv}(A)$ describe la clausura convexa asociada a un conjunto dado A):

Definición 3.2 Sean $C, C_1, C_2 \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$

$$\wedge) C_1 \wedge C_2 := C_1 \cap C_2$$

$$\vee) C_1 \vee C_2 := \text{conv}(C_1, C_2). \text{ Es convexo y está contenido en } \mathcal{C}.$$

$$\neg) \neg C := C^\perp \cap \mathcal{C}$$

$$\longrightarrow) C_1 \rightarrow C_2 := C_1 \subseteq C_2$$

El nuevo retículo tiene las siguientes propiedades:

- Se mantienen contraposición y no contradicción:

$$C_1 \rightarrow C_2 \Rightarrow \neg C_2 \rightarrow \neg C_1$$

$$C \wedge (\neg C) = \mathbf{0}$$

- La doble negación ya no es válida. Por lo tanto, $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ no es un ortoretículo.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ es una red que contiene a todos los subconjuntos convexos del espacio de estados cuánticos.
- Incluye una copia $\mathcal{L}_{v\mathcal{N}}$ (sus elementos son representados como caras o lados del conjunto convexo de estados cuánticos).
- Todos los estados cuánticos son proposiciones de la forma $\{\rho\} \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ (ya que cada punto de $\mathcal{C}$ es un estado cuántico).

Apelando a los retículos extendidos descritos anteriormente, la relación entre un todo cuántico y sus partes puede expresarse como se muestra en la Figura 2. Usando los retículos extendidos, es posible definir diferentes mapas canónicos entre $\mathcal{L}_{\mathcal{C}_1}$, $\mathcal{L}_{\mathcal{C}_2}$, $\mathcal{L}_{\mathcal{C}_1} \times \mathcal{L}_{\mathcal{C}_2}$, and $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$.

La imposibilidad de reducir la información del todo a la de sus partes puede expresarse en términos formales mediante la ecuación:

$$\Lambda \circ \tau \neq \tau \circ \Lambda \quad (15)$$

La ecuación anterior debería ser clara por sí misma: dice que pasar del todo a las partes y luego pasar de las partes al todo no transmitirá la misma información que la operación inversa. En otras palabras, no es lo mismo bajar y subir que subir y bajar. Las estructuras matemáticas presentadas en esta sección permiten una descripción formal de la conexión entre las propiedades del todo y las propiedades de sus partes.

4. Teorías de conjuntos no estándar

Al tratar con objetos, es natural describirlos en términos de conjuntos. Por lo tanto, es natural asumir que una mereología debe tener una forma intrínseca de abordar conjuntos de entidades o partes. Sin embargo, los conjuntos de entidades cuánticas deben manejarse con cuidado. Para definir algunas ideas, podemos pensar en el conjunto de números naturales o en el conjunto de planetas del sistema solar. En estos ejemplos, los componentes del conjunto tienen identidades bien definidas: cada planeta o número puede distinguirse claramente de los demás. Además, la relación de pertenencia está claramente definida: el número dos es par o no. Por lo tanto, pertenece o no al conjunto de números pares. No existe una tercera posibilidad. Como se explicó anteriormente, los objetos cuánticos pueden encontrarse en situaciones en las que sean verdaderamente indistinguibles. Por lo tanto, la forma en que los electrones forman un conjunto no debería ser la misma que en los ejemplos de planetas y números, al menos desde un punto de vista formal. Incluso la noción de pertenencia se ha cuestionado en el dominio cuántico: ¿hasta qué punto podemos identificar con claridad la relación de pertenencia para el conjunto de electrones con espín hacia arriba en un material dado? Los sistemas descritos a continuación buscan capturar estas características cuánticas de manera formal, proporcionando un marco adecuado para la noción de *conjunto de entidades cuánticas*. Por supuesto, estos sistemas formales pueden considerarse la base de una matemática no estándar, inspirada en la teoría cuántica.

4.1. Quasissets y Quasets: $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}^-$ y QST

Para dar cuenta de las particularidades de los sistemas cuánticos, fueron propuestas las teorías axiomáticas de conjuntos QST (Quaset) y $\mathfrak{Q}$ (Quasissets). Aunque ambas teorías fueron motivadas por intereses cuánticos, se distinguen radicalmente en los objetivos perseguidos y en la forma de distanciarse de ZF.

QST fue desarrollada por María Luisa Dalla Chiara y Giuliano Toraldo di Francia (Dalla Chiara et al. (1998); Dalla Chiara and Toraldo di Francia (1993)). Está formulada en un lenguaje lógico de primer orden con identidad y su peculiaridad radica en que dentro de su lenguaje no lógico existe un primitivo de pertenencia adicional ($\notin$), tal que la fórmula $x \notin y$ puede ser interpretada como *con seguridad x no pertenece a y* . Este nuevo símbolo, a diferencia de lo que ocurre en ZF, es independiente de $\in$. Esto es, la siguiente fórmula bien formada del lenguaje de QST no es válida: $x \notin y \leftrightarrow \neg(x \in y)$. Lo anterior tiene como consecuencia la existencia de estados de pertenencia indeterminados. Si un quaset y admite elementos con pertenencia indeterminada, entonces existen elementos x (al menos uno) que satisfacen $\neg(x \in y) \wedge \neg(x \notin y)$. Esta es la principal peculiaridad que distingue a QST de ZF. Es decir, QST cuenta con una pertenencia no estándar que admite un tercer grado, la pertenencia indeterminada a un quaset. Sus autores sugirieron que esta característica podría relacionarse con la incertidumbre cuántica y los estados de superposición. Originalmente se propuso para poder dar cuenta de estados cuánticos con propiedades no absolutamente determinadas. A pesar de estas diferencias con ZF, QST tiene una copia interna de ZF. Es decir, dentro del universo de QST, existe un dominio que es isomorfo al universo de ZF (jerarquía acumulativa de von Neumann, por poner un ejemplo).

La teoría de quasissets $\mathfrak{Q}$ fue propuesta por Décio Krause y luego ampliada y aplicada en

colaboración con otros autores (Krause and Costa (1990); Krause (1992, 1996); French and Krause (2006)). A diferencia de QST, su metalenguaje lógico de primer orden no cuenta con identidad, esto es, tiene una lógica no reflexiva en su metateoría. Sin embargo, para ciertos entes de su dominio, puede definirse una *identidad extensional* (ver definición 1 de Holik et al. (2022)). Estos entes son los pertenecientes a la copia isomorfa de ZF que Ω tiene en su interior. Existen algunos *objetos*, fuera de la copia interna de ZF, llamados *m-átomos*, para los cuales no está definida la relación de identidad (ni su negación). Tales entes, llamados no individuos o entes sin identidad, son el correlato formal de los entes del micromundo. Dentro del marco formal de la teoría, se pueden postular distintos tipos de m-átomos, para que cada clase de partícula cuántica tenga su correlato en el formalismo.

La relación característica de Ω es la relación de indiscernibilidad. Este concepto es incorporado con un símbolo primitivo ($\equiv$) dentro del lenguaje no lógico de la teoría. Captura la noción física de partículas genuinamente indistinguibles, pero no idénticas. Si x, y representan entes cuánticos (*m-átomos*), para los cuales la identidad no está definida, entonces la fórmula bien formada " $x \equiv y$ " se interpreta como *los entes denotados por x e y son indiscernibles*. Esto es, son partículas cuánticas de la misma clase. La indiscernibilidad es un concepto primitivo más débil que la identidad, pero que coincide con ella cuando es aplicada a entes que pertenecen a cierto *dominio clásico* (copia isomorfa a ZF). Si x, y son variables que denotan electrones, entonces $x = y$ es una fórmula mal formada del lenguaje de Ω^4 , mientras que $x \equiv y$ expresa que tales electrones son indiscernibles. Estos entes se conciben diferentes "solo número", es decir, solo numéricamente discernibles; en consecuencia, desafían el Principio de Identidad de Indiscernibles. La teoría permite tratar conjuntos de elementos indiscernibles sin los trucos habituales de confinarlos en clases de equivalencia o estructuras no rígidas (deformables): en la teoría de cuasiconjuntos, se puede hablar y tratar estos elementos sin esos trucos estándar y con precisión lógica.

El poder de las teorías de qsets (Ω, Ω^-) para capturar formalmente la genuina indiscernibilidad de los entes cuánticos (sin trucos) radica en el concepto de *estructura deformable o no rígida*. Una estructura es *rígida* cuando toda subestructura puede ampliarse a otra cuyo único automorfismo sea la identidad (automorfismo trivial). En el marco de ZF, toda estructura puede ser ampliada a otra cuyo único automorfismo sea la identidad. Esto se debe a que siempre podemos agregar nuevas relaciones a nuestra estructura para que todos los entes indiscernibles dentro de la misma sean idénticos. Por esta razón, decimos (hablando pronto) que ZF representa una estructura rígida. En los formalismos de qsets, la relación de indiscernibilidad permite definir un automorfismo no trivial. Por lo tanto, estas teorías permiten capturar genuinamente la noción de ente sin identidad y representan estructuras deformables (ver Krause (2023) y su bibliografía).

4.2. Introducción a QST y Ω

En este apartado, daremos una introducción básica a QST y Ω . Presentaremos su lenguaje no lógico y sus principales características. Para un estudio más detallado, recomendamos (Dalla Chiara et al. (1998); Dalla Chiara and Toraldo di Francia (1993); French and Krause

⁴Es una fórmula mal formada, porque el metalenguaje no cuenta con el primitivo lógico de identidad y, además, la sintaxis del lenguaje objeto de la teoría restringe la aplicación de la *identidad extensional* (que es definida) a m-átomos.

(2006); Holik et al. (2022); Jorge et al. (2023)).

4.2.1. Lenguaje no lógico de QST

La teoría QST cuenta con un lenguaje lógico de primer orden con identidad. Su lenguaje no lógico incluye los siguientes conceptos primitivos específicos:

1. Un predicado monádico: urobjeto (O).
2. Tres predicados binarios: la relación de pertenencia positiva ($\in$), la pertenencia negativa ($\notin$), y la relación de inclusión ($\subseteq$). Cuando escribimos ' $x \in y$ ', queremos decir que x *ciertamente* pertenece a y , y si $x \notin y$, significa que x *ciertamente no* pertenece a y . De ese modo, la negación $\neg(x \in y)$ dice que es falso que x *ciertamente* pertenece a y , lo que (de acuerdo a los axiomas, por ejemplo por 4.2) no equivale a decir que x *ciertamente no* pertenece a y .
3. Un símbolo funcional unario: el cuasicardinal ($qcard$).
4. Un símbolo funcional binario: la intersección entre quasetes ($\sqcap$).

Definición 4.1 *Un quaset es algo que no es un urobjeto:*

$$Q(x) := \neg O(x)$$

Axioma 4.1 *Todo lo que tiene elementos es un quaset:*

$$\forall x \forall y (x \in y \longrightarrow Q(y))$$

Axioma 4.2 *Si se sabe con certeza que algo no pertenece a un quaset, entonces no se da que pertenezca con certeza al quaset dado. Sin embargo, la recíproca no es cierta en general:*

$$\forall x \forall y (x \notin y \rightarrow \neg(x \in y))$$

El axioma anterior produce que existan instancias de " $(x \in y) \vee (x \notin y)$ " que sean refutables y, por ello, exista la posibilidad de relaciones de pertenencia indeterminadas. Como sugieren los autores en Dalla Chiara and Toraldo di Francia (1993), el *saber con certeza* puede interpretarse como *pertenece con seguridad* si uno no quiere sugerir una lectura epistémica. Como es bien sabido, la mecánica cuántica admite tanto interpretaciones ontológicas del *principio de incertidumbre* de Heisenberg como también interpretaciones epistémicas del mismo.

Axioma 4.3 *La relación de inclusión entre quasetes ($\subseteq$) es un orden parcial (reflexiva, antisimétrica y transitiva).*

El símbolo $\subseteq$ tiene un significado intensional, pero no necesariamente extensional. $x \subseteq y$ se puede leer como "el concepto x implica el concepto y ".

Axioma 4.4 *La inclusión de quaset implica la inclusión extensional.*

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \rightarrow \forall z ((z \in x \rightarrow z \in y) \wedge (z \notin y \rightarrow z \notin x)))$$

Definición 4.2 (Pertenencia débil o indeterminada) Sean x un quaset e y un objeto cualquiera. Decimos que y pertenece débilmente a x , y lo denotamos $y \in^- x$, si se cumple que es falso que y pertenece con seguridad a x y también es falso que con seguridad no pertenece a x , esto es,

$$y \in^- x := \neg(y \in x) \wedge \neg(y \notin x). \quad (16)$$

Intuitivamente, y es algo que *no está completamente dentro* de x , o no se tiene absoluta certidumbre de ello, ni tampoco *está completamente fuera* de él.

Con la definición anterior, podemos asegurar que la siguiente expresión de QST se cumple siempre:

$$\forall x \forall_Q y ((x \in y) \vee (x \in^- y) \vee (x \notin y))$$

Axioma 4.5 *Todo quaset tiene una única qextensión, donde la qextensión de un quaset x , denotada por $qext(x)$, es el único quaset que contiene con certeza a todos los elementos de x y con certeza no contiene a todas las otras entidades:*

$$\forall_Q x \exists!_Q y \forall z ((z \in y \leftrightarrow z \in x) \wedge (z \notin y \leftrightarrow \neg(z \in x)))$$

En la expresión anterior, los cuantificadores $\forall_Q x P(x)$ y $\exists_Q x R(x)$ deben ser interpretados como $\forall x (Q(x) \rightarrow P(x))$ y $\exists x (Q(x) \wedge R(x))$ respectivamente.

El axioma anterior justifica hacer la siguiente definición:

Definición 4.3 (qextensión de un quaset)

$$\forall x \forall y (y = qext(x) \leftrightarrow \forall z ((z \in y \leftrightarrow z \in x) \wedge (z \notin y \leftrightarrow \neg(z \in x))))$$

Definición 4.4 *Los conjuntos (clásicos) son los quaset que son idénticos a su qextensión.*

En Jorge et al. (2023), se muestra una extensión del lenguaje objeto y axiomática de QST para que la teoría pueda adaptarse a las necesidades metalingüísticas de las semánticas no deterministas de Nmatrices.

4.2.2. Lenguaje no lógico de Ω

Presentamos el lenguaje objeto de la teoría de qsets con átomos. Los símbolos primitivos no lógicos son:

- un predicado binario “ $\equiv$ ”, que significa “indiscernible” o “indistinguible”,

- tres predicados unarios " Z ", " m " y " M ", que tienen la siguiente interpretación intuitiva: $Z(x)$ dice que x es un conjunto, esto es, una copia de un ente de ZFU; $m(x)$ dice que x es un m-átomo, que pretende representar sistemas cuánticos (sean partículas cuantizadas o excitaciones de campo); $M(x)$ indica que x es un átomo de ZFU. La teoría aún cuenta con una noción derivada de identidad extensional, simbolizada por " $=_E$ ", que se define solo para M átomos que pertenecen a los mismos cuasiconjuntos o cuasiconjuntos con los mismos elementos,
- un símbolo funcional unario qc , que toma como entrada un qset y devuelve un número cardinal de ZF.

El único primitivo no lógico de ZF, el símbolo de pertenencia $\in$, es también parte del lenguaje objeto de Ω .

El significado intuitivo de los símbolos primitivos se da de la siguiente manera:

- $x \equiv y$, x es indiscernible de y .
- $m(x)$, x es un "microobjeto" o un m-átomo. Esto es, un no individuo o ente sin identidad.
- $M(x)$, x es un "macroobjeto" o un M-átomo.
- $Z(x)$, x es un "conjunto" – una copia de un conjunto ZFU,
- $qc(x) = n$, el qset x tiene n elementos, o su quasi-cardinal es n .

Para profundizar en los axiomas y detalles de Ω , recomendamos (French and Krause (2006); Holik et al. (2022)).

4.3. Introducción a la teoría de casi-conjuntos sin átomos Ω^-

La teoría sin átomos Ω^- nació motivada por algunas críticas realizadas a Ω . La primera de estas es que Ω no exige (axiomáticamente) la existencia de m-átomos, pero en ausencia de estos colapsa a ZFU. Si comparamos con QST, donde el apartamiento con respecto a ZF se mantiene sin necesidad de átomos, esto puede ser visto como una desventaja de Ω . La segunda crítica pone el foco en el concepto de quasi-cardinalidad de Ω . Los q-cardinales, introducidos como una noción primitiva, son cardinales construidos por medio de conjuntos, y sabemos que la manera usual de definir cardinales es por medio de ordinales (Jech (2003))⁵. Esto es, como los cardinales son ordinales límite, asignar un cardinal a un qset es biyectarlo con un número ordinal. Esto tiene una consecuencia no deseada para la teoría: el buen orden impuesto al qset, a través de esta biyección, permite distinguir sus elementos. La nueva teoría sin átomos elimina este problema utilizando una teoría auxiliar que asigna "cardinales" sin necesidad de recurrir a

⁵La definición más común sigue las ideas de von Neumann, donde un cardinal es un ordinal que no es equinumeroso con ningún ordinal menor que él. Esa definición depende del Axioma de la Elección. En 1954, Dana Scott propuso una definición de cardinal que no depende de ese axioma, sino del Axioma de la Regularidad. La definición de Scott utiliza los conjuntos (sí, son conjuntos) V_α de la jerarquía de von Neumann, así que reintroduce los ordinales por la puerta de atrás, pues necesita del concepto de biyección; vea (Jech, 2003, p.65).

los ordinales de ZF. Esta teoría es isomorfa a la aritmética de Peano con sucesor. Para contar elementos de un qset, Ω^- recurre a un nuevo primitivo de cardinalidad denotado mediante K .

La nueva teoría Ω^- sirve al menos para dos propósitos; por un lado, permite que un q-conjunto sea formado por elementos indiscernibles y aun así tenga un q-cardinal finito sin que eso implique una ordenación de sus elementos.⁶ Por otro lado, sin átomos, puede ser útil para fundamentar una *ontología cuántica de propiedades*.

4.3.1. Principales características de Ω^-

En esta sección, presentaremos algunas características de Ω^- que nos permitirán establecer algunas relaciones con la mereología.

Comencemos marcando algunas propiedades compartidas por ambas teorías de qsets. El metalenguaje sigue estando constituido por la lógica de primer orden sin identidad. La relación característica de Ω , la relación de indiscernibilidad $\equiv$, se mantiene en la teoría sin átomos. Sin embargo, al no haber m-átomos, es una relación entre qsets. Ω^- también cuenta con una copia interna de ZF, al igual que su antecesora (y QST), esto es, es una extensión conservativa de ZF (no ya de ZFU).

Descartando la ausencia de átomos (y el cambio que esto produce sobre la relación de indiscernibilidad, que en Ω relacionaba m-átomos), la principal diferencia entre Ω y Ω^- está asociada con la forma de contar elementos de los qsets. Los qcardinales de Ω son ordinales límites de ZF, los qcardinales finitos⁷ de Ω^- son elementos de una teoría isomorfa a la Aritmética de Peano con sucesor. Para contar elementos de un qset en Ω , establecíamos biyecciones con cardinales; para contar elementos de qsets en Ω^- , usamos un símbolo primitivo de relación diádica K , que toma como primer elemento un qset x y como segundo elemento un número “a la Peano”, proveniente de su teoría auxiliar. Lo que en Ω se expresaba como “ $qc(x) = n$ ”, ahora se expresa como “ $K(x, n)$ ”. Donde el primer n es un cardinal de ZF, mientras que el segundo n es un número natural. Por lo tanto, Ω^- es una teoría ‘pura’ de qsets que se apoya en una teoría isomorfa a la Aritmética para contar elementos. Sus axiomas se separan en axiomas lógicos, axiomas sobre cardinales y axiomas sobre qsets. Recomendamos Krause and Jorge (2024) al lector interesado.

En Ω^- , se define una relación de pertenencia débil $\in^*$ que, además de permitir relacionar esta teoría con QST, puede ser utilizada para definir una relación de inclusión débil $\subset^*$.

Definición 4.5 (Pertenencia débil) $x \in^* y := \exists w(w \in y \wedge w \equiv x)$

Es decir, un elemento x pertenece al qset y si algún indiscernible suyo pertenece a este qset. De esta manera, yendo al reino del micromundo, todo electrón del universo⁸ pertenece débilmente al primer orbital de cualquier átomo de helio. Se prueba que si x o y son conjuntos pertenecientes a la copia interna de ZF, entonces $x \in y \leftrightarrow x \in^* y$.

⁶Llamaremos “finitos” a los q-conjuntos que tienen q-cardinales puestos por la teoría de apoyo que desarrollamos abajo.

⁷Existen también cardinales no finitos en Ω^- , pero serán tratados en este artículo.

⁸No entendido como m-átomo, ya que no hay átomos en Ω^- , sino como haces de propiedades que pueden ser identificados con qsets.

Con esta pertenencia débil, definimos

Definición 4.6 (Sub-q-conjunto o Sub-qset)

$$x \subseteq^* y := \forall z(z \in x \rightarrow z \in^* y) \wedge \forall m \forall n(K(x, m) \wedge K(y, n) \rightarrow m \leq n) \quad (17)$$

Las condiciones relativas a la qcardinalidad se imponen para garantizar que ningún sub-qset pueda tener más elementos que el conjunto del cual es parte.

Con estas definiciones, dado un qset fijo y , el dominio de $\mathfrak{Q}^-$ queda dividido en tres regiones excluyentes y exhaustivas.

$$\forall x((x \in y) \vee (x \notin y \wedge x \in^* y) \vee (x \notin^* y)) \quad (18)$$

Esto es, un ente x puede pertenecer al qset y (al estilo ZF), puede no pertenecer, pero pertenecer un indiscernible suyo, o puede pasar que ni él ni ningún indiscernible suyo pertenezca. Esto deja a la vista cierta similitud con lo que ocurre en QST. Para ver detalladamente las relaciones entre $\mathfrak{Q}^-$, QST y RST, recomendamos Jorge et al. (2025).

La definición de pertenencia débil de $\mathfrak{Q}^-$ implica que

$$x \subseteq^* y \wedge y \subseteq^* x \leftrightarrow x \equiv y \quad (19)$$

Más adelante, veremos que algo muy similar pasa en el sistema ZF^* .

5. El sistema formal ZF^* y la descripción de sistemas con número indefinido

En esta sección, presentaremos el sistema ZF^* , que fue presentado originalmente en da Costa and Holik (2015) y luego analizado en Holik and Jorge (2023).

Las teorías de cuasiconjuntos $\mathfrak{Q}$ y QST, inspiradas en la ontología cuántica, tratan con colecciones de formas no estándar. Sin embargo, no son suficientes para dar fundamento a una mereología por sí mismas, ya que carecen de una definición explícita de un concepto clave de cualquier mereología, a saber, la noción de *parte*. Como quedará a la vista, la noción de *parte* no es equivalente a la de subconjunto (a pesar de que los axiomas de conjunto potencia que hemos presentado definen un “conjunto” que muchas veces es denominado “conjunto de partes”). Cuando tratamos con la noción de *parte*, estamos involucrando aspectos *no extensionales*. Es decir, características que no pueden quedar totalmente definidas en términos formales a través de un axioma de extensionalidad, que nos permiten saber bajo qué condiciones dos colecciones son *la misma*. No está de más reiterar que $\mathfrak{Q}$ se considera una teoría *semiextensional*, debido a que cuenta con un axioma de extensionalidad que es más débil que el correspondiente a ZF. Esto produce que cualquier permutación de un ente perteneciente a un dado qset con “otro” que sea indiscernible genere qsets indiscernibles. Es decir, no tenemos forma de corroborar a mano si han permutado dos entes indiscernibles, uno de nuestros qsets y otro que no pertenece.

Para qsets que estén formado por la misma clase de entes indiscernibles, no hay forma de saber si son o no el *mismo* qset (se postula por definición que si comparten todos sus entes, son el mismo, pero no hay forma de corroborar esto, ya que los m -átomos son genuinamente indiscernibles). Como consecuencia de esto, se puede pensar que cada qset tiene asociada una *nube* (cloud) de entes indiscernibles a los propios con los cuales puede estar intercambiando constantemente elementos sin que esto produzca ninguna variación (ver Cunha do Nascimento et al. (2011)).

A pesar de que la inclusión de qsets ($\subseteq$) se define de forma estándar y que los axiomas (qc_3) , (qc_4) , (qc_5) y (qc_7) (Holik et al. (2022), sección 5) nos permiten manejar estos sub-qsets como si fueran clásicos, este concepto tampoco puede considerarse totalmente extensional, por las mismas razones que dimos arriba. Piense que la doble inclusión de qsets debería llevarnos a concluir que estamos frente a un único qset. Por lo tanto, toda semiextensionalidad asociada con la identidad de qsets queda asociada automáticamente al concepto de sub-qset. Como el concepto de sub-qset no es totalmente extensional, podría llevarnos a relacionarlo de alguna forma con el concepto de *parte*. Esto, en principio, no puede ser descartado y será objeto de futuros trabajos.

Dentro del formalismo de QST, la inclusión de quasets ($\subseteq$) es un concepto primitivo, que implica la inclusión clásica (la inclusión entre sus respectivas *qextensiones*). Que en QST no exista ningún axioma de extensionalidad para quasets que no sean clásicos (que no cumplan el predicado Z) produce que QST sea una teoría intensional. A pesar de que la inclusión de quasets sea un orden parcial y que la doble inclusión colapse en la identidad, al no tener forma de vincularla directamente con la inclusión clásica (ya que la implicación vale sólo en un sentido, la de qaset implica la clásica), el concepto de subqaset no puede expresarse de forma extensional. Por lo tanto, el primitivo de inclusión de qaset también podría vincularse con el concepto mereológico de *parte*.

6. Número indefinido de componentes e indecibilidad lógica

Comenzaremos introduciendo el lenguaje primitivo no lógico de ZF^* . En su metalenguaje, tenemos la lógica de primer orden con identidad.

- Un predicado diádico de pertenencia “ $\in$ ”.
- Un predicado monádico “ C ” (en la interpretación pretendida, “ $C(X)$ ” significa “ X es un conjunto”).
- Un predicado diádico de *parte* “ $\sqsubset$ ”. “ $X \sqsubset Y$ ” significa “ X es una *parte* de Y ”.

La ontología de la teoría contiene conjuntos y *cosas físicas*⁹ (que podrían pensarse como

⁹Cabe destacar que la ontología no queda unívocamente determinada por el formalismo, pero la “evoca” de cierta manera.

los urelementos de la teoría, aunque no son vacíos¹⁰). Estas últimas no son conjuntos, es decir, no forman colecciones clásicas.

Una posible definición de indiscernibilidad dentro de nuestra mereología es la siguiente:

$$\alpha \equiv \beta := \alpha \sqsubset \beta \wedge \beta \sqsubset \alpha \quad (20)$$

De esta forma, tal concepto no sería primitivo, como pasa en Ω . Alternativamente, podría introducirse siguiendo la misma estrategia que en Ω . Es decir, basándose en una relación primitiva como “ $\equiv$ ” y luego establecer axiomas que vinculen estos conceptos. Esto nos llevaría directamente a reflexionar sobre el concepto de sub-qsets anteriormente mencionado. Esta alternativa quedará postergada para próximos trabajos.

Usando lo anterior, es posible dar las siguientes definiciones. Dada una fórmula F , la noción de una colección de entidades que satisfacen esa fórmula se puede definir como:

$$\exists\{x \mid F(x)\} := \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow F(x)) \quad (21)$$

También necesitaremos la definición de *ente cantoriano*:

$$Cant(\alpha) := \exists\{\beta \mid \beta \sqsubset \alpha\} \quad (22)$$

La ecuación anterior dice que una entidad dada es cantoriana siempre que podamos describir sus partes como una colección que se comporta bien. En caso de que una determinada entidad sea cantoriana, podemos asignarle formalmente un número de componentes, como el cardinal asociado al conjunto de todas sus partes.

$$|\alpha| := |\{\beta : \beta \sqsubset \alpha\}| \quad (23)$$

Si α satisface $\neg Cant(\alpha)$, entonces, no hay forma de asignarle un cardinal. Por tanto, como consecuencia de los axiomas de la teoría, podrían existir entidades no cantorianas. Para ellos, el número de componentes será indefinido. El lector ya puede notar que aquí la indefinición está asociada a la imposibilidad de conceder la existencia de un objeto en un sistema formal. En cierto sentido, uno puede representar algo que sucede en el mundo real (como la existencia de sistemas físicos para los cuales el número de componentes no está definido (9) (11)) como una limitación de un sistema formal.

Antes de continuar, reflexionemos brevemente acerca del significado de no ser cantoriano. Utilizando las definiciones (21) y (22), podemos escribir

$$Cant(\alpha) = \exists\{\beta : F(\beta)\} = \exists y \forall \beta (\beta \in y \leftrightarrow \beta \sqsubset \alpha) \quad (24)$$

Donde hemos sustituido uniformemente x por β y tomado $F(\beta) = \beta \sqsubset \alpha$.

Por lo tanto, no ser cantoriano, $\neg Cant(\alpha)$, podemos escribirlo como

¹⁰Recordemos que los urelementos de QST no son necesariamente vacíos. Es decir, nada en el formalismo de QST garantiza que a un urelemento no le pertenezcan otros entes de forma indeterminada. Esto puede proveernos un vínculo interesante a la hora de relacionar esta mereología con QST.

$$\neg Cant(\alpha) = \forall y \exists \beta \neg(\beta \in y \leftrightarrow \beta \sqsubset \alpha) \quad (25)$$

O equivalentemente,

$$\neg Cant(\alpha) = \forall y \exists \beta [(\beta \in y \wedge \beta \not\sqsubset \alpha) \vee (\beta \notin y \wedge \beta \sqsubset \alpha)] \quad (26)$$

Lo que significa que si α es no cantoriano, cualquier conjunto legal de nuestro formalismo que contenga a todas las partes de α (β) necesariamente contendrá otros entes que no son partes de α . Si se desean contener solo partes de α , es decir, que todos sus elementos sean partes de α , el precio a pagar es que algunos de estas partes quedarán sin pertenecer al conjunto en cuestión. Este es un problema conocido para los lógicos y se relaciona con la paradoja de Russell y el problema de instanciar propiedades conceptuales (ver introducción de Field (2008)). Las opciones que acabamos de presentar para las partes de α no cantoriano pueden relacionarse con lo que se conoce como *Overspill Solution* y *Underspill Solution* en teorías de la verdad. Este problema, relacionado con instanciar propiedades, podría ser enfocado desde la óptica de QST, donde los predicados pueden estar asociados con quasetes. De esta manera, *Overspill* y *Underspill Solution* podrían ser asociadas respectivamente con la *clausura* y *qextensión* de los quasetes vinculados a los predicados. Dejaremos esta posibilidad para ser estudiada con mayor detenimiento en futuros trabajos.

7. Cosas indefinidas

De la discusión anterior, podemos obtener el siguiente resultado. Si α es tal que $\neg Cant(\alpha)$ y $F(x)$ es un *fbf*, no es posible probar la existencia del siguiente conjunto dentro del formalismo de ZF:

$$\alpha_F = \{\beta \sqsubset \alpha : F(\beta)\} \quad (27)$$

Esto es,

$$ZF \not\vdash \exists \{\beta \sqsubset \alpha : F(\beta)\} \quad (28)$$

Como consecuencia, no podemos, en general, describir los componentes que satisfacen ciertas propiedades como una colección que se comporta bien. Esto da lugar a propiedades indefinidas en el siguiente sentido: si α no es cantoriano, no podemos afirmar que sus partes tengan la propiedad definida por $F(x)$, ni que no la tengan (lo que tiene una impronta a QST). Este tipo de indeterminación en la posesión de una propiedad se puede utilizar para describir la situación que se origina cuando se prepara un sistema cuántico en un estado de superposición, como por ejemplo:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad (29)$$

Según la formulación estándar de la teoría cuántica, no podemos decir si el sistema tiene un espín hacia arriba o hacia abajo, porque esa propiedad no está definida antes de la medición.

Por lo tanto, el sistema ZF^* puede dar una descripción formal de uno de los conceptos más importantes de la teoría cuántica, a saber, los estados de superposición.

¿Cómo entender cosas indefinidas? ¿Cómo formalizar la idea de que algo está indefinido (en un sentido ontológico fuerte)? El mensaje de ZF^* se puede resumir de la siguiente manera¹¹:

$$\text{INDETERMINACIÓN} \iff \text{INDECIBILIDAD}$$

Creemos que la doble implicación anterior abre una línea muy interesante de investigación filosófica. ¿Hasta qué punto podemos relacionar las nociones de indeterminación cuántica e indecidibilidad lógica? Las intuiciones más profundas que guían a los físicos cuánticos se basan en la idea de que existe una aleatoriedad intrínseca en la naturaleza. Tenga en cuenta que esta idea rectora subyace, por ejemplo, a toda la industria de construir generadores comerciales de números aleatorios cuánticos (es decir, utilizar sistemas cuánticos como fuentes de verdadera aleatoriedad). Debido al supuesto de verdadera aleatoriedad, no es posible atribuir los resultados de las observaciones a propiedades que poseía el sistema antes de la medición, porque los resultados de futuros experimentos simplemente no están definidos antes de su realización concreta. En ese sentido, esas propiedades no están definidas. De esta manera, la indecidibilidad lógica (o indefinición) podría usarse como herramienta conceptual para dar una representación formal de las intuiciones de los físicos en activo. El sistema ZF^* es un primer paso en esta dirección. Terminamos este capítulo notando que este tipo de análisis está motivado por cuestiones que van mucho más allá de la filosofía de la física: una comprensión más profunda de las conexiones entre aleatoriedad, indefinición e indecidibilidad lógica podría tener implicaciones directas en la física y las matemáticas en los campos de generación de números aleatorios y certificación de aleatoriedad.

8. La no extensionalidad y su vínculo con la formalización del concepto de parte

Esta sección analiza algunas posibilidades a la hora de capturar las propiedades características del concepto de parte componente utilizando recursos de los formalismos no estándar que presentamos anteriormente.

Las teorías extensionales de conjuntos adolecen de ciertas dificultades a la hora de capturar las propiedades de los sistemas cuánticos, como indiscernibilidad genuina, entrelazamiento, etc. Algunas de estas pueden ser sorteadas si utilizamos formalismos que se alejen de la extensionalidad.

Llamaremos extensional a una teoría si presenta un axioma de extensionalidad que permita caracterizar unívocamente a sus conjuntos recurriendo solo a una relación de pertenencia y a la identidad metateórica. En una teoría extensional, todas las propiedades de sus conjuntos quedan absolutamente determinadas por los entes que pertenecen al mismo. Por supuesto, esto presupone que estos entes son individuos (entes con identidad) y que la teoría es bien

¹¹En el marco de QST, los sistemas con propiedades indeterminadas estarán asociados con elementos que pueden pertenecer de forma indeterminada tanto a una quaset A como a su complemento A^c . Este es otro vínculo que deberá ser analizado a la hora de establecer relaciones entre nuestra mereología y QST.

fundada. Es conocido el caso de los conjuntos de Boffa, donde, a pesar de tener un axioma de extensionalidad e identidad metateórica, existen serias dificultades a la hora de saber si dos conjuntos son o no el mismo. Esto es consecuencia a que tales conjuntos forman parte de una teoría no bien fundada, es decir, sin axioma de Regularidad (ver Maia and Nizzardo (2024)). A la hora de caracterizar conjuntos, no contar con axioma de Regularidad, incluso teniendo Extensionalidad, puede traer aparejadas dificultades semejantes a las de no contar con la identidad (ver sección 8 de Jorge et al. (2025)).

En una teoría de conjuntos extensional, como ZF, los resultados sobre la cardinalidad de los conjuntos son teoremas. Es decir, sin necesidad de postular axiomas que involucren el concepto de cardinalidad, las proposiciones sobre cardinales se deducen de los axiomas de la teoría. Esto implica que la cardinalidad de un conjunto queda absolutamente determinada una vez que se define el conjunto, es decir, cuando se conocen qué entes pertenecen al mismo. Como vimos anteriormente, las colecciones de entes cuánticos pueden no tener un cardinal definido. Esto sugiere fuertemente el uso de una teoría no extensional para dar cuenta de tal comportamiento. Al menos, de una teoría que no tenga un axioma de extensionalidad tan fuerte como el de ZF. Las principales opciones son: i) debilitar el axioma de Extensionalidad incluyendo dependencia con otras propiedades distintas a la pertenencia estándar (por ejemplo, admitiendo otros primitivos de pertenencia extras). También podría ser eliminado este axioma o restringido su dominio de acción ii) eliminar la identidad metateórica para que cualquier caracterización dada por un axioma de Extensionalidad (más débil) caracterice también otros conjuntos, que se relacionen entre ellos por la relación de indiscernibilidad iii) eliminar Regularidad, permitiendo la existencia de conjuntos con cadenas infinitas de pertenencia (o bucles), de tal forma que para saber si una colección de entes caracteriza unívocamente un conjunto, tengamos que recurrir a una cadena de verificación que no termina (como se muestra en Maia and Nizzardo (2024)).

La indiscernibilidad de los entes del micromundo es otra característica que no se lleva bien con la extensionalidad. Esto es consecuencia directa de que contar con un axioma de Extensionalidad estándar, más identidad, produce que el dominio de nuestra teoría no sea deformable, es decir, solo admita el automorfismo trivial. De esta manera, todos sus entes son individuos y cualquier presunta indiscernibilidad termina siendo simulada o no genuina. Es decir, contar con la identidad y un axioma de Extensionalidad fuerte o estándar termina comprometiéndonos con estructuras rígidas (no deformables), que no se llevan bien con la genuina indiscernibilidad. Al igual que en el caso de la cardinalidad, la indiscernibilidad sugiere también involucrarse con teorías no extensionales.

Con el entrelazamiento, tan vinculado con propiedades holistas, pueden realizarse razonamientos análogos, que motiven el abandono de axiomáticas extensionales a cambio de otras menos restrictivas. Por un lado, las teorías de “conjuntos” motivadas en la ontología cuántica son no extensionales (como QST) o semiextensionales (caso de Ω^- y Ω). Por otro lado, la teoría ZF* muestra también un apartamiento de la extensionalidad, reflejado en su primitivo $\sqsubset$ y la posibilidad de admitir colecciones no cantorianas. Por lo tanto, estas teorías son candidatas a formalizar ciertas propiedades de una mereología cuántica.

8.1. La relación de participación mereológica

Como dijimos, la noción mereológica básica es la noción de “parte”. La relación mereológica básica es la relación de participación, que media entre la parte y el todo del cual participa. Sea

P un predicado binario que representa a la relación de participación. Así, por ejemplo, Pxy se lee “ x es parte de y ”.

A este predicado se le suelen imponer las siguientes propiedades:

(MP1) Reflexividad: Pxx

(MP2) Transitividad: $Pxy \wedge Pyz \rightarrow Pxz$

(MP3) Antisimetría: $Pxy \wedge Pyx \rightarrow x = y$

Son útiles las siguientes definiciones de conceptos mereológicos:

(PP) Parte propia: $PPxy := Pxy \wedge \neg(x = y)$

(OV) Overlap o superposición: $Oxy := \exists z(Pzx \wedge Pzy)$

(DJ) Disjunción: $Xxy := \neg Oxy$

(SUM) Suma mereológica: $Suxy := Pxu \wedge Pyu \wedge \forall w(Pwu \rightarrow Owx \vee Owy)$

De la conjunción de (MP1), (MP2) y (MP3) se sigue que la relación de participación P , constituye un orden parcial. La relación de participación propia PP , por su irreflexividad, constituye un orden parcial estricto.

Mostraremos que la inclusión débil de casi-conjuntos ($\subseteq^*$) es, en principio, un buen candidato para formalizar las propiedades y definiciones anteriores.

(MP1) $Pxx : x \subseteq^* x$

Esto se cumple por la definición de inclusión débil de qsets (4.6).

(MP2) $x \subseteq^* y \wedge y \subseteq^* z \rightarrow x \subseteq^* z$

Lo anterior es una consecuencia directa del siguiente resultado:

$$x \in^* A \wedge x' \equiv x \rightarrow x' \in^* A.$$

Para formalizar MP3, utilizamos la relación de indiscernibilidad, en lugar de la identidad, ya que nuestros sistemas no cuentan con identidad. Por lo tanto, expresaremos este principio de la siguiente manera:

(MP3) $x \subseteq^* y \wedge y \subseteq^* x \rightarrow x \equiv y$

Esto es también una consecuencia directa de la relación de inclusión débil entre qsets. Por lo tanto, se satisface (MP3). Podríamos mantener la relación de sub-q-set como primitiva y definir la indiscernibilidad utilizando la cláusula anterior, de forma semejante a como se procede en da Costa and Holik (2015). Para formular (PP), prescindiremos nuevamente de la identidad y la reemplazaremos por la indiscernibilidad:

$$(PP) \quad PPxy := x \subseteq^* y \wedge \neg(x \equiv y)$$

O equivalentemente,

$$(PP') \quad PPxy := x \subseteq^* y \wedge \neg(y \subseteq^* x)$$

La formulación de (OV) en nuestra teoría es :

$$(OV) \quad Oxy := \exists z (\neg(z \equiv \emptyset) \wedge z \subseteq^* x \wedge z \subseteq^* y)$$

Tomando la pertenencia débil $\in^*$ definida a partir de la pertenencia estándar y la indiscernibilidad, lo anterior se prueba equivalente a

$$Oxy \leftrightarrow \neg(x \cap^* y \equiv \emptyset) \quad (30)$$

$$(DJ) \quad Xxy := \forall z ((z \equiv \emptyset) \vee \neg z \subseteq^* x \vee \neg z \subseteq^* y)$$

Que en $\mathfrak{Q}^-$ es equivalente a

$$x \cap^* y \equiv \emptyset \quad (31)$$

El concepto de suma mereológica lo formulamos como: u es la suma mereológica de x, y si satisface:

$$(SUM) \quad Suxy := x \subseteq^* u \wedge y \subseteq^* u \wedge \forall w (w \subseteq^* u \rightarrow \neg(w \cap^* x \equiv \emptyset) \vee \neg(w \cap^* y \equiv \emptyset))$$

El candidato natural para la suma mereológica u es $x \cup^* y$. De esta manera, las dos primeras proposiciones se satisfacen directamente:

$$x \subseteq^* x \cup^* y \wedge y \subseteq^* x \cup^* y.$$

Probemos que también se satisface la última la última cláusula de (SUM).

Si $e \in w$, por el antecedente del condicional, e pertenece débilmente a la suma mereológica $u = x \cup^* y$. Entonces $e \in^* (x \cup^* y)$. Esto implica dos posibilidades:

- $e \in x \cup^* y$
- $e' \in x \cup^* y \wedge e' \equiv e$

Si se da la primera opción, entonces $e \in^* x \vee e \in^* y$. Esto implica directamente que $w \cap^* x \not\equiv \emptyset \vee w \cap^* y \not\equiv \emptyset$.

Si se da el segundo ítem,

$$e' \in^* x \vee e' \in^* y \wedge e' \equiv e$$

La primera y tercera proposiciones implican $e \in^* x$. La segunda y tercera implican $e \in^* y$. Por lo tanto, $w \cap^* y \not\equiv \emptyset \vee w \cap^* x \not\equiv \emptyset$.

Por lo tanto, la unión débil de casi-conjuntos es un buen candidato para formalizar el concepto de suma mereológica. Esto significa que el formalismo de $\mathfrak{Q}^-$ es, en principio, un candidato razonable para formalizar una mereología cuántica. En Krause and Jorge (2024), se prueba que $\cup^*$ y $\cap^*$ no validan distributividad, lo que representa un indicio más a favor de nuestra propuesta.

9. A modo de cierre

El estudio de la relación entre el todo y sus partes plantea desafíos especiales para la filosofía de la teoría cuántica. Cuando los sistemas cuánticos se presentan en agregados, podemos encontrar no separabilidad, indistinguibilidad y un número indefinido de componentes. Si bien la mayoría de los estudios se centran en el problema de la no separabilidad, aquí hemos discutido diferentes sistemas formales que permiten describir estas nociones de una manera que ayude a superar las ambigüedades del lenguaje natural. De ello se deduce que es posible dar una representación formal rigurosa de muchas de las nociones intuitivas asociadas a la física cuántica. Indistinguibilidad, número indefinido de componentes e imposibilidad de reducir el todo a sus partes son nociones que pueden captarse de manera formal.

La formalización de las características peculiares que muestran los sistemas cuánticos cuando se consideran en agregados es relevante para una mejor comprensión de las conexiones entre los niveles macroscópicos y microscópicos de la realidad. Nuestro análisis sugiere que la imagen de un objeto macroscópico como un simple agregado “partes extra partes” de pequeñas entidades localizadas es altamente engañosa. Tener esto en cuenta es crucial en el análisis del llamado problema de medición, dado que supone implícitamente que un aparato de medición puede describirse como un simple agregado de sistemas elementales que evolucionan unitariamente. Este punto de vista reduccionista ha demostrado ser problemático en muchas otras áreas de investigación y tampoco puede implementarse ingenuamente en el dominio cuántico. El análisis presentado en este trabajo refuerza la necesidad de superar el problema de la medición con una estrategia diferente y no reduccionista reexaminando de forma crítica la noción de “parte” en el dominio cuántico.

También hemos discutido la conexión entre la indeterminación cuántica e indecidibilidad lógica. En otras palabras, hemos sugerido que la indecidibilidad lógico-formal podría usarse como herramienta para formalizar muchas de las intuiciones que subyacen a la teoría cuántica. En particular, hemos señalado la relevancia de estas ideas en el contexto de la generación y certificación de números aleatorios cuánticos. El tratamiento formal de las intuiciones que subyacen a la indeterminación cuántica podría ser de ayuda para una comprensión más profunda del concepto de *verdadera aleatoriedad*.

Finalmente, podemos resaltar que hemos presentado algunas ideas para relacionar una mereología cuántica con las teorías de cuasiconjuntos. La no extensionalidad es un vínculo que debe ser estudiado para establecer conexiones entre estos marcos formales. Los conceptos no extensionales de cada teoría podrían ser relacionados entre ellos. Es decir, los conceptos de *parte*, *sub-qset* e *inclusión de quaset*s deben ser analizados detenidamente.

Referencias

- Cunha do Nascimento, M., Krause, D., and de Araújo Feitosa, H. (2011). The quasi-lattice of indiscernible elements. *Studia Logica*, 97(1):101–126.
- da Costa, N. C. A. and Holik, F. (2015). A formal framework for the study of the notion of undefined particle number in quantum mechanics. *Synthese*, 192(2):505–523.
- Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R., Krause, D., et al. (1998). Quasiset theories for microobjects: a

- comparison. *Interpreting bodies: Classical and quantum objects in modern physics*, Princeton University Press, Princeton, pages 142–152.
- Dalla Chiara, M. L. and Toraldo di Francia, G. (1993). Individuals, kinds and names in physics. *Bridging the gap: philosophy, mathematics, physics*, pages 261–283.
- Domenech, G. and Holik, F. (2007). A discussion on particle number and quantum indistinguishability. *Foundations of Physics*, 37(6):855–878.
- Domenech, G., Holik, F., and Krause, D. (2008). Q-spaces and the foundations of quantum mechanics. *Foundations of Physics*, 38(11):969–994.
- Field, H. (2008). *Saving Truth From Paradox*. Oxford University Press.
- French, S. and Krause, D. (2006). *Identity in physics: A historical, philosophical, and formal analysis*. OUP Oxford.
- Holik, F. and Jorge, J. P. (2023). Open problems in the development of a quantum mereology: And their ontological implications. In *Non-reflexive logics, non-individuals, and the philosophy of quantum mechanics: essays in honour of the philosophy of Décio Krause*, pages 157–176. Springer.
- Holik, F., Jorge, J. P., Krause, D., and Lombardi, O. (2022). Quasi-set theory: A formal approach to a quantum ontology of properties. *Synthese*, 200(5):401.
- Holik, F., Jorge, J. P., and Massri, C. (2025). Indistinguishability right from the start in standard quantum mechanics. In *Individuals and non-individuals in quantum theory*, pages 45–69. Springer.
- Holik, F., Krause, D., and Gómez, I. (2013). Quantum logical structures for identical particles. *arXiv preprint arXiv:1305.5242*.
- Holik, F., Massri, C., and Ciancaglini, N. (2012). Convex quantum logic. *International Journal of Theoretical Physics*, 51(5):1600–1620.
- Jech, T. (2003). *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. Springer.
- Jorge, J. P. and Holik, F. (2023). Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación: II. *Teorema: Revista internacional de filosofía*, 42(1):149–169.
- Jorge, J. P., Holik, F., and Krause, D. (2023). Un acercamiento a las semánticas Nmatriciales basadas en QST. *Principia: an international journal of epistemology*, 27(3):8.
- Jorge, J. P., Holik, F., and Krause, D. (2025). Relating quasi-sets and rough sets: from quantum entities to AI. *International Journal of Theoretical Physics*, 64(10):289.
- Krause, D. (1992). On a quasi-set theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 33(3):402–411.
- Krause, D. (1996). Axioms for collections of indistinguishable objects. *Logique et analyse*, pages 69–93.
- Krause, D. (2023). A remark on quasi-automorphisms and deformable structures in quasi-set theory and its account to the logical foundations of quantum theory.

- Krause, D. and Costa, N. C. A. d. (1990). Não-reflexividade, indistinguibilidade e agregados de weyl.
- Krause, D. and Jorge, J. P. (2024). Sobre una teoría 'pura' de casi-conjuntos y su aplicación a una ontología cuántica de propiedades. *Forthcoming in Principia*.
- Krause, D., Jorge, J. P., and Lombardi, O. (2025). A quasi-set theory without atoms and its application to a quantum ontology of properties. *Forthcoming Synthese*.
- Maia, N. and Nizzardo, M. (2024). Identity and extensionality in boffa set theory. *Philosophia Mathematica*, 32(1):115–123.
- Marton, J., Bartalucci, S., Bertolucci, S., Berucci, C., Bragadireanu, M., Cargnelli, M., Curceanu, C., Di Matteo, S., Egger, J., Guaraldo, C., et al. (2013). Testing the pauli exclusion principle for electrons. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 447, page 012070. IOP Publishing.
- Walls, D. F. (1983). Squeezed states of light. *nature*, 306(5939):141–146.
- Wilczek, F. and Devine, B. (1989). *Longing for the Harmonies Themes and Variations From Modern Physi*. WW Norton & Company.